Envariabelsanalys Z & TD. ht2017, Föreläsning 2.3

Repetition:

- Partialbråksuppdelning, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

  (iii) Q har faktor x^2+bx+c som saknar reella rötter

  Ansätt en term av formen $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

  (iv) Q har faktor $(x^2+bx+c)^k$ som saknar reella rötter och $k>1$, $k \in \mathbb{N}$. Ansätt termer av formen

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

- 4 kategorier av primitiva till funktioner innehållande rotuttryck:

  I. $\sqrt{x+\alpha}$: Låt $t = \sqrt{x+\alpha}$

  II. $\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$: Låt $t = \sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$

  III. $\sqrt{\alpha - x^2}$: Låt $x = \sqrt{\alpha}\sin(t)$, $|t| \leq \pi/2$

  IV. $\sqrt{\alpha + x^2}$: Oftast specialtrick

Idag:

* Generaliserade integraler med:

  (i) Oändliga definitionsmängder

  (ii) Obegränsade integrander

* Jämförelsesatser

Generaliserade integraler: (6.5)

Vi har hittills definierat integraler av begränsade

Funktioner på <u>begränsade</u> intervall.

<u>Problem</u>: Det finns gott om intressanta:

(i) begr. fkner. def. på obegr. intervall

(ii) obegr. fkner. def. på begr. intervall

(iii) obegr. fkner. def. på obegr. intervall

Det är ibland möjligt att ge mening åt integralen av (i)–(iii) också

<u>(i)</u>: Antag att f är en begränsad funktion definierad på $[a,\infty)$ (eller $(-\infty,b]$)

<u>Definition</u>: Om f är integrerbar på intervallet $[a,N]$, $N>0$ (resp. $[-N,b]$) och gränsvärdet

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx \quad \left(\text{resp. } \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^b f(x)\,dx\right)$$

existerar (säg är lika med $A\in\mathbb{R}$) säger vi att den <u>generaliserade</u> integralen (eng.: improper integral)

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^b f(x)\,dx\right)$$

är <u>konvergent</u>. Talet A kallas då dess <u>värde</u>. Om gränsvärdet inte existerar säger vi att den generaliserade integralen är <u>divergent</u>.

<u>Ex.</u> Beräkna $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

<u>Lösn.</u>: $\int_0^N e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^N = 1-e^{-N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

<u>Ex.</u> Beräkna $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$

<u>Lösn.:</u> $\int_0^N \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^N = 1-\cos(N)$

Saknar gränsvärde då $N \to \infty$

$\therefore \int_0^\infty \sin(x)\,dx$ är divergent

<u>Ex.</u> Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

<u>Lösn.:</u> Olika fall beroende på om $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$

<u>$\alpha = 1$:</u> $\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^N = \ln(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$

$\therefore \int_1^N \frac{1}{x}\,dx$ divergent

<u>$\alpha \neq 1$:</u> $\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^N = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha}-1\right) \xrightarrow[N\to\infty]{}$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{om } \alpha > 1 \\ \infty & \text{om } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{om } \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \text{om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(ii) Antag nu att f endast är definierad i $(a, b]$ (resp. $[a, b)$) dvs $f(x) \to \infty / -\infty$ då $x \to a^+$ (resp. $x \to b^-$)

<u>Definition:</u> Om f är integrerbar på intervallet

$[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ (resp. $[a, b-\varepsilon]$) och gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = A \quad \left(\text{resp. } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A\right)$$

existerar, säger vi att den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

är <u>konvergent</u> med <u>värdet</u> A. Om gränsvärdet inte existerar säger vi att $(*)$ är <u>divergent</u>.

<u>Ex.</u> Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

<u>Lösn.</u>: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty$ då $x \to 1^+$

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^{2} = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 2$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2$$

<u>Ex:</u> Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>Lösn.</u>: Olika fall beroende på om $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$

<u>$\alpha = 1$:</u> $\displaystyle\frac{1}{x} \to \infty$ då $x \to 0^+$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_\varepsilon^1 = -\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \infty$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad \text{divergent}$$

<u>$\alpha \neq 1$:</u> $$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{-\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \begin{cases} -\infty & \text{om } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{om } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & \text{om } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{om } \alpha < 1 \end{cases}$$

(iii): Kan hända att vi t.ex. har $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ eller $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ där $f(x) \to \infty/-\infty$ då $x \to a^+$. I dessa fall får man dela upp integralen i flera integraler där varje del är generaliserad på endast ett sätt som i (i) & (ii).

Ex. Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Lösn.: $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

Vi vet att: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ divergent då $\alpha \geq 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ divergent då $\alpha \leq 1$

$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ divergent $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Jämförelsesatser: Många gånger vill man veta om en given generaliserad integral är konvergent eller ej, utan att vara intresserad av dess värde. För att avgöra detta kan man använda följande (självklara men ändå) kraftfulla sats:

Sats: Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla x i integrationsintervallet, så gäller att:

(a) Om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$ konvergent.

(b) Om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$ divergent.

<u>Obs!</u> Om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$ är divergent, så kan ingenting sägas om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$. Om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$ är konvergent, så kan inget sägas om $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$.

<u>Ex</u>. Är integralen $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx$ konvergent eller divergent?

<u>Lösn.</u>: Problem med både 0 och ∞

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

<u>I</u>: För $0 < x \leq 1$ gäller att: $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \quad \text{konvergent} \quad (\alpha = 1/2)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \quad \text{konvergent}$$

<u>II</u>: För $x \geq 1$ gäller att: $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx \ \text{konvergent} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \ \text{konvergent}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \ \text{är konvergent!}$$