Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 3.1

Repetition:

- Definition: (i) Om f begränsad funktion definierad på $[a,\infty)$ (eller $(-\infty,b]$) säger vi att den generaliserade integralen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^b f(x)\,dx\right)$$

har värdet $A \in \mathbb{R}$ om

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx = A \quad \left(\text{resp. } \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^b f(x)\,dx = A\right)$$

(ii) Om f definierad på $(a,b]$ (eller $[a,b)$) och $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \pm\infty$ (resp. $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \pm\infty$) säger vi att den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

har värdet $A \in \mathbb{R}$ om

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = A \quad \left(\text{resp. } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = A\right)$$

- Sats: Antag att $0 \le f(x) \le g(x)$

(a) $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$ konv.

(b) $\int_{a/-\infty}^{b/\infty} f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_{a/-\infty}^{b/\infty} g(x)\,dx$ div.

Idag

* Rotationsvolymer
* Mer volymberäkningar

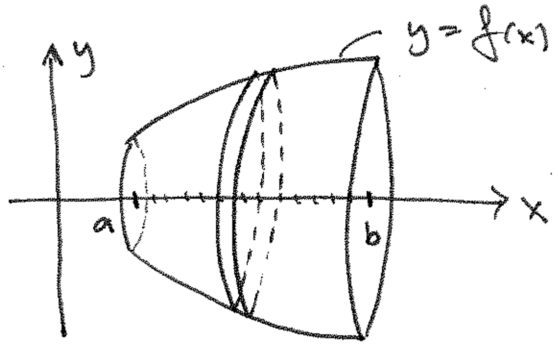
Kapitel 7: Tillämpningar av integraler

Rotationsvolymer: (7.1)

För att beräkna volymer av godtyckliga kroppar krävs flervariabelsanalys och trippelintegraler (lp. 4)

Men om kroppen kan fås genom att man roterar grafen $y=f(x)$ kring x- eller y-axeln, en s.k. rotationsvolym, räcker det med vanliga envar. integraler.

(i) Rotation kring x-axeln



Antag att vi har kroppen

Gör en indelning

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Om indelningen är fin (dvs n stort) bör $f(x)$ inte förändras mycket då $x \in [x_{j-1}, x_j]$. För en godtycklig punkt $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ gäller därför att om V_j är volymen av skivan mellan x_{j-1} och x_j, så kommer $f(\xi_j)$ att vara "radien" av skivan

$$\Rightarrow \quad V_j \approx \pi f(\xi_j)^2 (x_j - x_{j-1})$$

$$\Rightarrow \quad V = \sum_{j=1}^{n} V_j \approx \sum_{j=1}^{n} \pi f(\xi_j)^2 (x_j - x_{j-1})$$

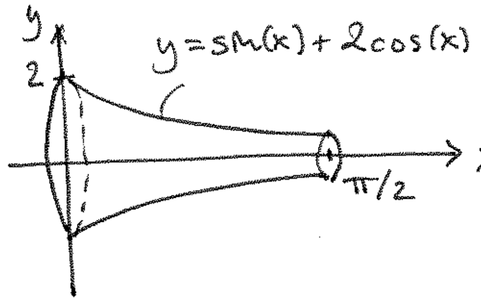
Ju finare indelning, desto bättre approximation och vi ser att

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \pi f(\xi_j)^2 (x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

Ex. Ytan mellan grafen till

$$f(x) = \sin(x) + 2\cos(x) \qquad 0 \leq x \leq \pi/2$$

och x-axeln roterar kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym.



Lösn.: $V = \int_0^{\pi/2} \pi f(x)^2 \, dx =$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} (\sin(x) + 2\cos(x))^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(x) + 4\sin(x)\cos(x) + 4\cos^2(x) \right) dx =$$

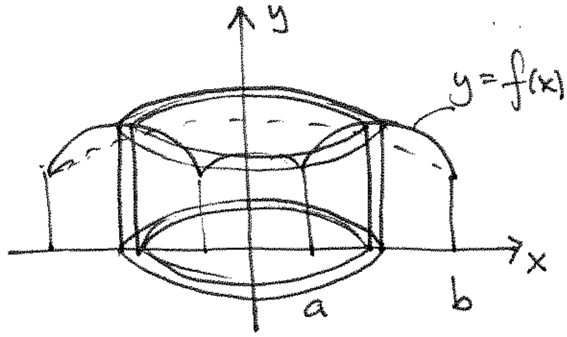
$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\sin(2x) + 3\cos^2(x) \right) dx =$$

$$= \pi \left(\left[x - \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2} 3 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) dx \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} - (-1) - (0 - 1) + \frac{3}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi(5\pi + 8)}{4} \quad \text{v.e.}$$

(ii) Rotation kring y-axeln:



Antag nu att vi har kroppen

Denna kan man inte skiva upp som tidigare. Istället fyller vi den med rör

$$\text{Volym rör} \approx 2\pi x f(x) \Delta x$$

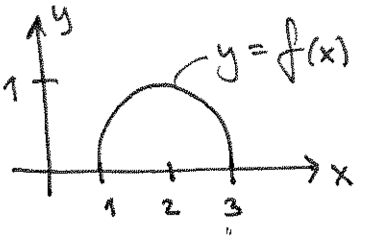
Genom att resonera på samma sätt som tidigare

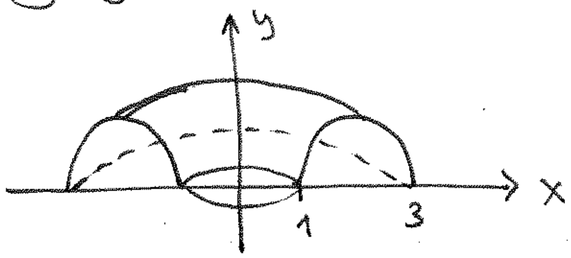
Får vi alltså att: $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$

Ex. Bestäm volymen av den kropp som fås då området mellan grafen till

$$f(x) = 1-(x-2)^2 \qquad 1 \le x \le 3$$

och x-axeln roteras kring y-axeln.

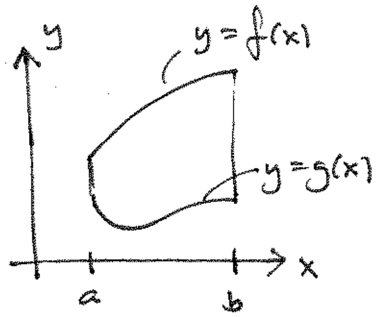
Lösn.: 

$\Rightarrow$ 

$$V = \int_1^3 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_1^3 x\left(1-(x-2)^2\right)dx =$$

$$= 2\pi \int_1^3 \left(-x^3+4x^2-3x\right)dx = \ldots = \frac{16\pi}{3} \text{ v.e.}$$

Detta resonemang kan generaliseras på (minst) 3 olika sätt:



I. Det område som roteras kring x- och y-axeln behöver inte vara området under grafen $y=f(x)$, utan kan vara området mellan två grafer $y=f(x)$, och $y=g(x)$.

Om $0 \le g(x) \le f(x)$ får vi:

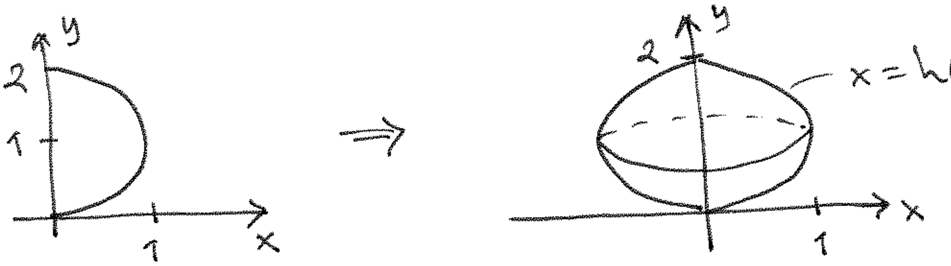
(i) $V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)dx$

(ii) $V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x)-g(x)\right)dx$

II. Kurvan måste inte vara en graf av formen $y = f(x)$ vi kan lika gärna ha $x = h(y)$. Geometriskt innebär detta att vi "byter plats" på x- och y-axeln. Alltså beräknas även rotationsvolymerna "tvärtom", dvs rotation kring y-axeln skivas upp medan rotation kring x-axeln fylls med rör.

Ex. Beräkna volymen av den kropp som fås då området mellan kurvan $x = 2y - y^2$ och y-axeln roteras kring y-axeln.

Lösn.: $2y - y^2 = 0 \Leftrightarrow y(2-y) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \cdot y_2 = 2$



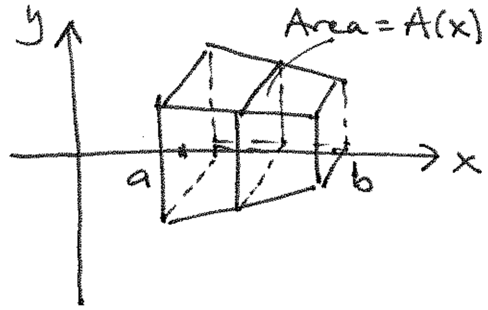
$$\Rightarrow V = \int_0^2 \pi h(y)^2 dy = \pi \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy =$$

$$= \pi \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) dy = \ldots = \frac{16\pi}{15} \text{ v.e.}$$

Alt. lösn.: Byt plats på x och y:

Samma volym som den kropp som fås då området mellan $y = 2x - x^2$ och x-axeln, roteras kring x-axeln.

III. Området måste inte nödvändigtvis uppkomma som en rotationskropp. Skivmetoden fungerar så länge vi känner till tvärsnittsarean (Avsnitt 7.2)



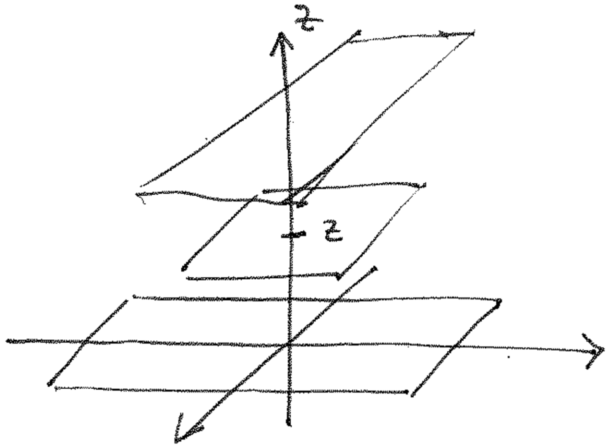
Om $A(x)$ är känd $\forall x \in [a.b]$

så ger samma resonemang

som tidigare att:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ex. En kropp är 6 dm hög. Dess horisontella tvärsnitt på höjden z dm över dess bas är en rektangel med längden $2+z$ dm och bredden $8-z$ dm. Beräkna kroppens volym.



Lösn.: $A(z) = (2+z)(8-z) =$

$= 16 + 6z - z^2$

$$\Rightarrow V = \int_0^6 (16 + 6z - z^2)\,dz =$$

$$= \left[16z + 3z^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_0^6 =$$

$$= 96 + 108 - 2 \cdot 36 = 96 + 36 = 132 \text{ dm}^3$$