Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 3.2

Repetition:

- Rotationsvolymer:

(i) $y=f(x)$ kring x-axeln: $V=\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$

(ii) $y=f(x)$ kring y-axeln: $V=\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$

(iii) $x=h(y)$ kring x-axeln: $V=\int_a^b 2\pi y\, h(y)\, dy$

(iv) $x=h(y)$ kring y-axeln: $V=\int_a^b \pi (h(y))^2 dy$

- Skivmetoden:

Om tvärsnittsarean $A(x)$ är känd $\forall x \in [a,b]$ så

$$V=\int_a^b A(x)\, dx$$

Idag:

* Båglängd
* Rotationsytor
* Massberäkningar

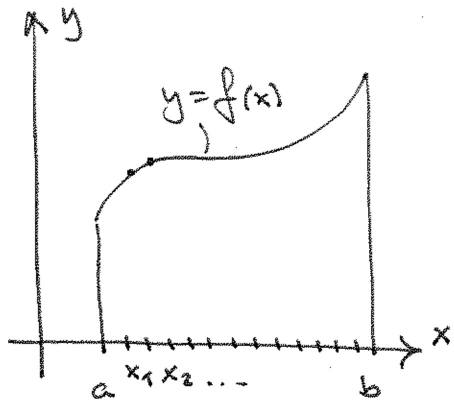
Båglängd: (7.3)

Givet en graf $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ kan vi m.h.a. integraler beräkna kurvans längd, dess s.k. båglängd.

Principen är samma som tidigare: Först härleder vi en approximativ båglängd med summor, och därefter går vi i gräns och får en integral.

Låt P vara en partition:

$P: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$



Avståndet mellan två punkter

$(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ och $(x_j, f(x_j))$ på kurvan

ges av:

$$d_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$$

Så en approximation av båglängden, s, ges av

$$s \approx \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$$

Vad händer då $n \to \infty$?

$$d_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 \left(1 + \frac{(f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}{(x_j - x_{j-1})^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}_{\text{"}\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{"} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{df}{dx} = f'(x)}} \; \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\to dx}$$

$$\therefore \quad s = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} d_j = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Ex. Beräkna längden av kurvan $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$, $x \in [1, 2]$

Lösn.: $y'(x) = 4x^3 - 2 \cdot \frac{x^{-3}}{32} = 4x^3 - \frac{1}{16x^3}$

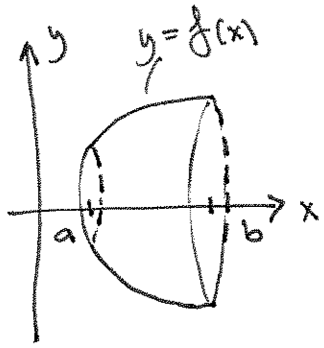
$$\Rightarrow (y'(x))^2 = \left(4x^3 - \frac{1}{16x^3}\right)^2 = (4x^3)^2 - 2 \cdot 4x^3 \cdot \frac{1}{16x^3} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 =$$

$$= 16x^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16^2x^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (y'(x))^2 = 16x^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16^2x^6} = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

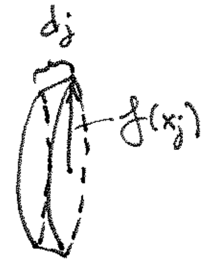
$$\Rightarrow s = \int_1^2 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{16}x^{-3}\right)dx =$$

$$= \left[x^4 - \frac{1}{32x^2}\right]_1^2 = 16 - \frac{1}{4\cdot 32} - \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 15 + \frac{3}{128} \text{ l.e.}$$



Rotationsytor: (7.3)

(i) x-axeln: Antag att vi roterar en kurva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ runt x-axeln och är intresserade av att beräkna rotationskroppens area (inte volym!)



Låt P vara en partition

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

och

$$d_j = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j - x_{j-1})$$

precis som tidigare. En approximation av rotationsarean ges då av

$$S_x \approx \sum_{j=1}^{n} 2\pi f(x_j)\,d_j$$

Låter vi $n \to \infty$ får vi:

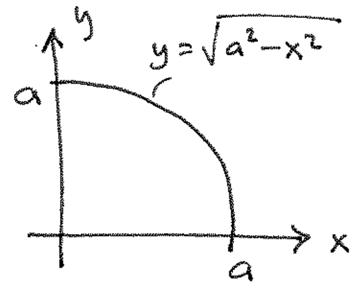
$$S_x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

(ii) y-axeln: Genom att resonera på exakt samma sätt som tidigare får vi i det här fallet:

$$S_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ex. Beräkna arean av en sfär med radie a

Lösn.: Låt $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$



Då gäller att:

Area sfär $= 2S_x = 2S_y$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Area} = 2S_y = 2\int_0^a 2\pi y \sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\, dx =$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{=a^2}}\, dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2}\, dx = 4\pi a^2 \text{ a.e.}$$

Massberäkningar: (7.4)

Vet att densiteten ρ av ett material ges av:

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ eller } \rho = \frac{m}{A} \text{ eller } \rho = \frac{m}{L}$$

där m = massa, V = volym, A = area, L = längd

$$\Leftrightarrow m = \rho V \text{ eller } m = \rho A \text{ eller } m = \rho L$$

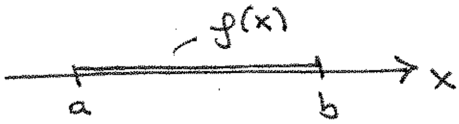
Problem: ρ behöver inte vara konstant!

Vi kan ha $\rho(x,y,z)$ eller $\rho(x,y)$ eller $\rho(x)$

Vi kommer endast att vara intresserade av $\rho(x)$.

Säg att vi t.ex. vill bestämma massan för en tunn tråd med varierande densitet. Välj koordinatsystemet så att tråden ligger på x-axeln mellan a och b.

Då $\rho = \rho(x)$. $x \in [a, b]$.



Låt P vara en partition

$$P: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Om n stort så bör $\rho(x)$ inte förändras mycket då $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Om m_j = massan mellan x_{j-1} och x_j, så

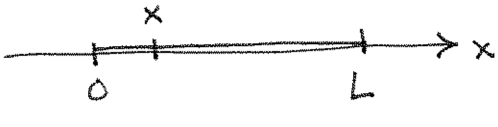
$$m_j \approx \rho(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

$$\Rightarrow \; m = \sum_{j=1}^{n} m_j \approx \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j)(x_j - x_{j-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \rho(x)\,dx$$

$$\therefore \; m = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

Ex. En rak tunn tråd av längden L har i varje punkt en densitet som är proportionell mot kvadratroten ur produkten av punktens avstånd till trådens ändar. Bestäm trådens massa.

Lösn.: Välj koord. systemet:



$$\Rightarrow \; \rho(x) = k\sqrt{x(L-x)} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; m = \int_0^L \rho(x)\,dx = \int_0^L k\sqrt{x(L-x)}\,dx = k\int_0^L \sqrt{-x^2 + Lx}\,dx =$$

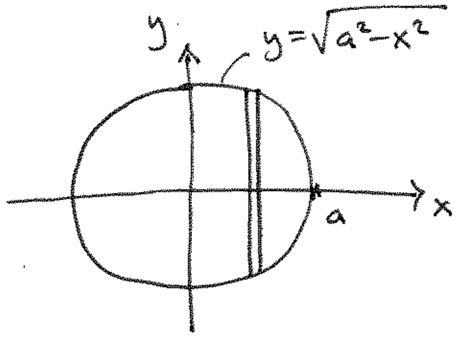
$$= k\int_0^L \sqrt{-\left(x^2 - 2\cdot\frac{L}{2}x + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)}\,dx = k\int_0^L \sqrt{-\left(x-\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} x - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\sin(t), & x = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{L}{2}\cos(t)\,dt, & x = L \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\sin^2(t)}\;\frac{L}{2}\cos(t)\,dt =$$

$$= \frac{kL^2}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \ldots = \frac{kL^2\pi}{8}\ \text{kg}$$

Ex. Beräkna massan av en cirkelskiva med radie a och centrum i origo, vars densitet i en punkt (x,y) ges av $\rho(x,y) = k(2a+x) = \rho(x)$.



Lösn.: Massan hos en tunn remsa:

$$dm = \rho(x)\,dA = \rho(x)\,2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad m = \int_{-a}^{a} 2k(2a+x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 4ak\underbrace{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{\text{area under grafen}} + \underbrace{2k\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{\text{udda funktion} \Rightarrow = 0} =$$

$$= 4ak\cdot\frac{\pi a^2}{2} = 2\pi k a^3\ \text{kg}$$