Envariabelsanalys Z & TD, ht 2017, Föreläsning 3.3

Repetition:

- Längden av en kurva kallas för dess båglängd. För grafen $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ ges båglängden av
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- Arean av en rotationsyta som fås då $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ roteras kring x- och y-axeln ges av

x-axeln: $$S_x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

y-axeln: $$S_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- För en kropp med varierande densitet $f(x)$, $x \in [a,b]$ ges den totala massan av
$$m = \int_a^b f(x)\, dx$$

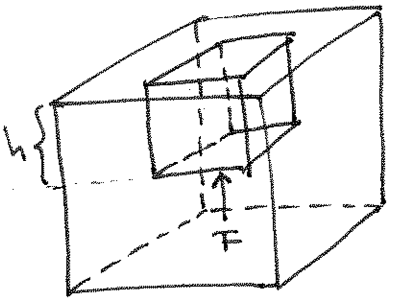
Idag:

* Hydrostatiskt tryck
* Differentialekvationer

Hydrostatiskt tryck: (7.6)

Vet att: $\text{Tryck} = \dfrac{\text{Kraft}}{\text{Area}}$. $P = \dfrac{F}{A}$ $[N/m^2 = Pa]$

Antag nu att vi har en tank full med vätska, säg en vattentank. Vad är trycket på djupet h m?



Archimedes princip: F = det undanträngda vattnets tyngd

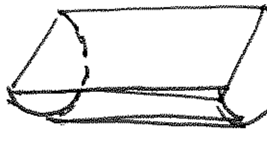
$$\Rightarrow P = \frac{m \cdot g}{A} \quad \text{där } m = \text{massa undanträngt vatten}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Vet att: $m = \rho V = \rho h A$ där $\rho = 10^3$ kg/m^3

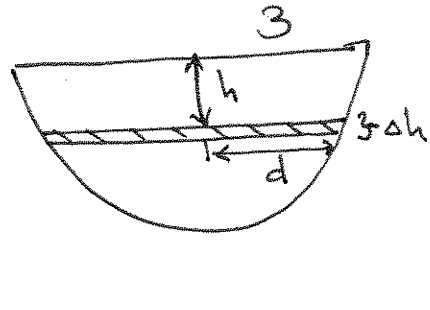
$$\therefore P = \frac{\rho h A g}{A} = \underline{\underline{\rho g h}}$$

I praktiska sammanhang är man oftast intresserad av att beräkna den totala kraften som en vätska utövar på en yta. $P = \rho g h$ brukar därför användas för att beräkna $F = P \cdot A = \rho g h A$.

M.h.a. integraler kan vi beräkna F för mer avancerade ytor.



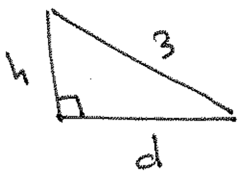
<u>Ex.</u> En tank har formen av en liggande halvcylinder med radie 3 m. Beräkna den totala kraften som utövas på en av tankens kortsidor då tanken är full med vatten.



<u>Lösn.</u>: En tunn remsa på djupet h m har arean

$$\Delta A = 2d\Delta h = 2\sqrt{3^2 - h^2}\,\Delta h$$

$\Rightarrow \Delta F = P\Delta A = 2\rho g h\sqrt{9-h^2}\,\Delta h$



$\Rightarrow F \approx \sum \Delta F = \sum 2\rho g h\sqrt{9-h^2}\,\Delta h$

Ju mindre Δh, desto bättre approximation. Låter vi $\Delta h \to 0$ får vi att:

$$F = \int_0^3 2\rho g h\sqrt{9-h^2}\,dh = \left\{ \begin{array}{l} x = 9-h^2, \quad h=0 \Leftrightarrow x=9 \\ dx = -2h\,dh, \quad h=3 \Leftrightarrow x=0 \end{array} \right\} =$$

$$= \rho g \int_9^0 \sqrt{x}\,(-dx) = \rho g \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^9 = \frac{2}{3}\rho g (\sqrt{9})^3 =$$

$$= 18\rho g \quad (\approx 1.8 \cdot 10^5 \text{ N})$$

Differentialekvationer: (7.9)

Definition: En differentialekvation är en ekvation som beskriver ett samband mellan en obekant funktion, $y(x)$, och dess derivator, $y'(x), y''(x), \ldots$

Om y bara beror på en variabel säger vi att diff.ekv. är en ordinär diff.ekv., ODE

(I flervariabelsanalys: partiella diff.ekv., PDE)

Differentialekvationer är extremt centrala inom både ren och tillämpad matematik.

Ex. Låt $y(t)$ = mängden av ett sönderfallande radioaktivt preparat vid tiden t.

Antag att: I. $y(0) = m$ kg

II. Mängden radioaktivt ämne som sönderfaller per tidsenhet är proportionell mot den totala mängden (kvarvarande) radioaktivt material (vid tidpunkten i fråga).

Detta kan modelleras med följande ODE:

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) & \leftarrow \text{(i) ODE} \\ y(0) = m & \leftarrow \text{(ii) Begynnelsevärde} \end{cases}$$

(i)+(ii) kallas för ett <u>begynnelsevärdesproblem</u>.

<u>Ex.</u> Låt $R(t)$ = Romeos kärlek till Julia vid tiden t

$J(t)$ = Julias kärlek till Romeo vid tiden t

Hur ser deras förhållande ut om:

$$\begin{cases} R'(t) = J(t) \\ J'(t) = -R(t) \end{cases}$$

<u>Lösn.</u>: <u>Steg 1</u>: Ju större Julias kärlek till Romeo är, desto mer kär blir Romeo i Julia (dvs desto mer ökar Romeos kärlek till Julia).

Ju större Romeos kärlek till Julia är, desto mer får Julia kalla fötter och vill dra sig undan (dvs desto mer minskar Julias kärlek till Romeo).

<u>Steg 2</u>: När Julia drar sig undan blir Romeo besviken

och drar sig undan också (dvs Romeos kärlek till Julia minskar)

När Romeo börjar dra sig undan blir Julia intresserad igen (dvs Julias kärlek till Romeo ökar).

Steg 3: Tillbaka till steg 1.

⋮

Definition: Med ordningen av en diff.ekv. menar man ordningen av den högsta förekommande derivatan.

Det första ex. ovan är en ODE av ordning 1

Det andra ex. ovan är ~~två~~ ett system av två ODE:n av ordning 1

Ex. $y^{(3)} + xy'' - y = x^2$ är en ODE av ordning 3

Linjära diff.ekv. av första ordningen: (7.9)

Definition: En linjär ODE av 1:a ordningen är en diff.ekv. som kan skrivas på formen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \qquad (*)$$

för några kontinuerliga funktioner g och h.

Dessa löses enligt följande recept:

Steg 1: Ta fram $G(x)$, en primitiv till $g(x)$ i $(*)$

Steg 2: Multiplicera båda leden i $(*)$ med $e^{G(x)}$, den s.k. integrerande faktorn:

$$e^{G(x)}y'(x) + g(x)e^{G(x)}y(x) = h(x)e^{G(x)}$$

Notera nu att:

$$VL = \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right)$$

så

$$(*) \iff \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right) = h(x)e^{G(x)} \qquad (**)$$

Steg 3: Integrera båda leden i $(**)$:

$$e^{G(x)}y(x) = \int h(x)e^{G(x)}\,dx + C$$

$$\therefore\ y(x) = e^{-G(x)}\int h(x)e^{G(x)}\,dx + Ce^{-G(x)}$$

Ex. Lös ekvationen: $y' - xy = x$

Lösn.: $y' + \underbrace{(-x)}_{\leftarrow g(x)}\cdot y = x$

$$\int -x\,dx = -\frac{x^2}{2} \implies \text{Integrerande faktor: } e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\implies \underbrace{e^{-x^2/2}y' - xe^{-x^2/2}y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)} = xe^{-x^2/2}$$

$$\implies e^{-\frac{x^2}{2}}y = \int xe^{-x^2/2}\,dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

$$\therefore\ y(x) = \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right)e^{\frac{x^2}{2}} = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$