Envariabelsanalys Z & TD. ht2017, Föreläsning 4.1

Repetition:

- Trycket P på djupet h m i en tank full med en vätska med densitet ρ ges av: $P = \rho g h$.

  Kan användas till att beräkna kraften på en yta via $F = P \cdot A = \rho g h A$.

- Definition: En ordinär differentialekvation, ODE, är en ekvation som beskriver ett samband mellan en funktion $y(x)$ och dess derivator $y'(x)$, $y''(x)$, ...

  Ordningen av en diff. ekv. är ordningen av den högsta förekommande derivatan.

- Definition: En linjär ODE av ordning 1 är en diff. ekv. som kan skrivas på formen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \qquad (*)$$

  där g, h givna kont. funktioner.

- Recept för lösning av $(*)$:

  Steg 1: Beräkna $G(x)$, primitiv till $g(x)$

  Steg 2: $(*) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right) = h(x)e^{G(x)}$

  Steg 3: $y(x) = e^{-G(x)} \int h(x)e^{G(x)}dx + Ce^{-G(x)}$

Idag:

* Separabla ODE:n

* Linjära ODE:n av ordning 2

Separabla ODE:n (7.9)

Definition: En ODE sägs vara separabel om den kan skrivas på formen

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x) \qquad (*)$$

för några givna kont. fkner. g och h.

Separabla ODE:n löses enligt följande recept.

Steg 1: Ta fram en primitiv funktion G till g och notera att

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{d}{dx} G(y(x))$$

Steg 2: $(*) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} G(y(x)) = h(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow G(y(x)) = \int h(x)\,dx + C$$

Steg 3: $y(x) = G^{-1}\left(\int h(x)\,dx + C\right)$

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, & y > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (**)$$

Lösn.: $(**) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y(t)}} y'(t) = 2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow G(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y(t)}} y'(t) = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{y(t)}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y(t)} = 2t + C \Leftrightarrow \sqrt{y(t)} = t + C$$

$\underline{t=0}$: $\sqrt{y(0)} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1$

$$\therefore y(t) = (t+1)^2$$

Om man studerar denna metod lite närmare kan man se att det som händer ä att vi integrerar VL i (*) m.a.p. y och HL i (*) m.a.p. x. Vi kan alltså ta följande genväg:

Steg 1: $g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$ "$\Rightarrow g(y)\,dy = h(x)\,dx$" $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx \Leftrightarrow G(y) = H(x) + C$$

Steg 2: $y(x) = G^{-1}(H(x) + C)$

Ex. Lös ODE:n

$$y' - 2xy^2 = 0 \qquad (\star)$$

Lösn.: $(\star) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx \Leftrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x^2 + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -(x^2 + C)$$

$$\therefore y(x) = -\frac{1}{x^2 + C} \qquad x^2 \neq -C$$

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy' = 1-y^2 \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

Lösn.: $x\frac{dy}{dx} = 1-y^2 \Longrightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} \Longleftrightarrow 1 = A(1+y) + B(1-y)$$

$y=1$: $1 = 2A \Longleftrightarrow A = 1/2$

$y=-1$: $1 = 2B \Longleftrightarrow B = 1/2$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\ln|1+y| - \ln|1-y|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln|x| + C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln(x^2) + C \Longleftrightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^C \cdot x^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+y}{1-y} = \overset{C}{\pm e^C} \cdot x^2 = Cx^2$$

$x=1$: $\frac{1+y(1)}{1-y(1)} = C\cdot 1^2 \Longleftrightarrow C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = 3x^2 \Longleftrightarrow 1+y = 3x^2 - 3x^2y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (3x^2+1)y = 3x^2 - 1$$

$$\therefore y(x) = \frac{3x^2-1}{3x^2+1}$$

Linjära ODE:n av ordning 2: (3.7)

Definition: En ODE av formen

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x) \qquad (*)$$

där $a(x)$, $b(x)$, $h(x)$ är kontinuerliga funktioner kallas för en linjär ODE av ordning 2. Om $a(x)$ och $b(x)$ är konstanta sägs den ha konstanta koefficienter.

Definition: (i) Ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (**)$$

kallas för den till $(*)$ hörande homogena ekv.

(ii) Om HL i $(*)$ inte är 0 kallas $(*)$ för en inhomogen ODE.

Sats: Låt y_p vara en godtycklig lösning till $(*)$, en s.k. partikulärlösning. Då gäller att:

y är en allmän lösning till $(*)$

$$\Longleftrightarrow$$

$y = y_h + y_p$ där y_h är en lösning till den homogena ekvationen $(**)$.

Bevis: Ingår ej!

Anm.: Detta gäller även linjära ODE:n av ordning 1. Vi har t.ex. sett att ODE:n

$$y' - xy = x$$

har lösningen $y(x) = -1 + Ce^{x^2/2}$. Vi ser att

$$\left(Ce^{x^2/2}\right)' - x \cdot Ce^{x^2/2} = 0$$

så $y_h = Ce^{x^2/2}$ löser den homogena ekv.

$$y' - xy = 0$$

medan $y_p = -1$ är en partikulärlösning.

Om vi istället för $y_p = -1$ hade tagit $y_p = -1 + 2e^{x^2/2}$ hade vi fått den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = -1 + \overbrace{(2+C)}^{C} e^{x^2/2}$$

Vi kan alltså dela upp lösandet av (*) i två delar:

(i) Finn <u>alla</u> lösningar till den homogena ekv. (**)

(ii) Finn <u>en</u> lösning till (*).