Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 4.2

Repetition:

- Definition: En ODE separabel om den kan skrivas på formen

$$g(y(x))\cdot y'(x) = h(x) \qquad (*)$$

- Recept för separabla ODE:n

Steg 1: $(*) \Leftrightarrow g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \text{ "}\Rightarrow g(y)\,dy = h(x)\,dx\text{"}$

$$\Rightarrow \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx \Leftrightarrow G(y) = H(x) + C$$

Steg 2: $y(x) = G^{-1}(H(x)+C)$

- Definition: (i) Linjär ODE av ordning 2:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x) \qquad (**)$$

(ii) Motsvarande homogena linjära ODE

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad (***)$$

(iii) En godtycklig lösning y_p till $(**)$ kallas för en partikulärlösning.

- Sats: y är en allmän lösning till $(**)$

$$\Leftrightarrow$$

$y = y_h + y_p$ där y_h löser $(***)$ och y_p partikulärlösning.

Idag:

* Lösning av: $y'' + ay' + by = 0$. a, b konstanter

* Linjära, homogena ODE:n med konst. koeff.

$y'' + ay' + by = 0$: (3.7)

Vill lösa ODE av formen

$$y'' + ay' + by = 0 \quad a, b \text{ konstanter} \quad (*)$$

Vi vet att 1:a ordningens homogena, linjära ODE:n löses av exponentialfunktioner av formen

$$y(x) = Ce^{rx} \quad . \quad C, r \text{ konstanter}$$

Vi testar vad som händer om vi stoppar in $y = Ce^{rx}$ i $(*)$:

$$y' = rCe^{rx} \quad , \quad y'' = r^2Ce^{rx}$$

$$\Rightarrow y'' + ay' + by = r^2Ce^{rx} + arCe^{rx} + bCe^{rx} =$$

$$= Ce^{rx}(r^2 + ar + b) \overset{\text{Vi vill}}{=} 0$$

Ser att Ce^{rx} är en lösning till $(*)$ om r är en rot till det s.k. karakteristiska polynomet

$$p(x) = x^2 + ax + b \qquad (**)$$

Har $(*)$ några andra lösningar?

Sats: Låt r_1 och r_2 vara rötter till det karakteristiska polynomet $(**)$. Då ges samtliga lösningar till $(*)$ av:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad \text{om } r_1 \neq r_2$$

och av

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{r_1x} \quad \text{om } r_1 = r_2$$

där C_1, C_2 konstanter.

Bevis: Ingår ej!

Obs! r_1 och r_2 behöver inte vara reella. Satsen gäller även för $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, såväl som för $a, b \in \mathbb{C}$.

Ex. Lös ODE:n

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Lösn.: Karak. ekv.: $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

$$\therefore y(x) = (C_1 x + C_2) e^{3x}$$

Ex. Lös ODE:n

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Lösn.: Karak. ekv.: $r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$\therefore y(x) = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x}$$

För i princip samtliga ODE:n

$$y'' + ay' + by = 0$$

som vi kommer att studera (och som är fysikaliskt intressanta) gäller att $a, b \in \mathbb{R}$. Detta medför att även om $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ så kommer $r_1 = \overline{r_2}$ dvs $r_1 = \alpha + i\beta$ och $r_2 = \alpha - i\beta$ där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

I dessa fall kan vi utnyttja Eulers formel:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

till att skriva om lösningen som

$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) =$$

$$= e^{\alpha x}\Big(C_1(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + C_2(\cos(\beta) - i\sin(\beta))\Big) =$$

$$= e^{\alpha x}\Big(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos(\beta x) + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B}\sin(\beta x)\Big)$$

Vi har bevisat följande:

<u>Sats</u>: Antag att lösningarna till den karakt. ekv. är $\alpha \pm i\beta$. Då ges lösningarna till $(*)$ av:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$$

där A, B konstanter.

<u>Ex</u>. (forts) Lös begynnelsevärdesproblemet (BVP)

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 5 \end{cases}$$

<u>Lösn. 1</u>: Vet att $y(x) = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x}$

$$\Rightarrow y'(x) = (-1+i)C_1 e^{(-1+i)x} + (-1-i)C_2 e^{(-1-i)x}$$

$y(0) = C_1 + C_2 = 3 \iff C_1 = 3 - C_2$

$y'(0) = (-1+i)C_1 + (-1-i)C_2 = 5$

$\Rightarrow (-1-i)C_2 - (-1+i)C_2 + 3(-1+i) = 5 \iff$

$\iff C_2(-1-i+1-i) = 5+3-3i \iff -2i\,C_2 = 8-3i$

$\iff C_2 = \dfrac{8-3i}{-2i} = \dfrac{3+8i}{2} \Rightarrow C_1 = \dfrac{3-8i}{2}$

$$\therefore\ y(x) = \frac{3-8i}{2}e^{(-1+i)x} + \frac{3+8i}{2}e^{(-1-i)x}$$

<u>Lösn.2:</u> $r_1 = -1+i,\ r_2 = -1-i \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 1$

$\Rightarrow y(x) = e^{-x}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = -e^{-x}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) +$

$+ e^{-x}\left(-A\sin(x) + B\cos(x)\right) =$

$= e^{-x}\left(-A\cos(x) - B\sin(x) - A\sin(x) + B\cos(x)\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ -A + B = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = 8 \end{cases}$$

$$\therefore\ y(x) = e^{-x}\left(3\cos(x) + 8\sin(x)\right)$$

<u>Linjära, homogena ODE:n med konst. koeff.:</u> (18.5)

En linjär, homogen ODE av ordning $n \in \mathbb{N}$ med konstanta koefficienter är en diff. ekv. av formen:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

där $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Dessa löser man på samma sätt som då $n=2$, dvs man tar fram det karakteristiska polynomet

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Då gäller att:

(i) Varje enkelrot, r_j, ger en term: $C_j e^{r_j x}$.

(ii) Varje multipelrot av multiplicitet $k \in \mathbb{N}$ (dvs $p(x)$ har en faktor $(x-r_j)^k$) ger termerna

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{r_j x}$$

(iii) Varje par av komplexa rötter, $x = \alpha \pm i\beta$, ger termerna

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

<u>Ex.</u> Lös ODE:n (a) $y^{(4)} - 16y = 0$

(b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

<u>Lösn.</u>: (a) Kar. ekv.: $r^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (r^2-4)(r^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow (r-2)(r+2)(r-2i)(r+2i) = 0$

$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{0 \cdot x}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x))$

(b) Kar. ekv.: $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0 \Leftrightarrow r^3(r^2 - 2r + 1) = 0$

$\Leftrightarrow r^3(r-1)^2 = 0$

$\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{0 \cdot x} + (C_4 + C_5 x)e^{1 \cdot x} =$

$= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 x e^x$