Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 4.3

Repetition:

- **Definition:** En linjär homogen 2:a ordningens ODE med konstanta koefficienter

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \text{ konst.} \qquad (*)$$

har det karakteristiska polynomet

$$p(x) = x^2 + ax + b \qquad (**)$$

- **Sats:** Om r_1, r_2 rötter till $(**)$ så ges samtliga lösningar till $(*)$ av

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \qquad \text{om } r_1 \neq r_2$$

eller

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \qquad \text{om } r_1 = r_2$$

där C_1, C_2 konstanter.

- **Sats:** Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ rötter till $(**)$ så ges samtliga lösningar till $(*)$ av

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big). \qquad A, B \text{ konst.}$$

Idag:

* Partikulärlösningar

Partikulärlösningar: (18.6)

Vill hitta en godtycklig lösning till

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

Vi kommer att studera några vanligt förekommande högerled $h(x)$.

(A) $h(x) = C$ konstant

Tre alternativ:

I. Om $b \neq 0$ är $y = \frac{C}{b}$ en lösning

II. Om $b = 0$, $a \neq 0$ är $y = \frac{C}{a} x$ en lösning

III. Om $b = a = 0$ är $y = \frac{C}{2} x^2$ en lösning

(B) $h(x) =$ polynom. Två alternativ:

I. Om $b \neq 0$, ansätt $y = q(x)$ där grad q = grad h

II. Om $b = 0$, $a \neq 0$, ansätt $y = x q(x)$ där grad q = grad h

Ex. Lös ODE:n $y'' - y' = x^2$

Lösn.: (i) Homogenlösn.: Kar. ekv.: $r^2 - r = 0$

$\Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 + C_2 e^x$

(ii) Partikulärlösn.: Vi gör ansatsen

$y = x q(x)$ där grad $q = 2$ dvs

$y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$\Rightarrow y' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\quad y'' = 6Ax + 2B$

Insättning ger: $6Ax + 2B - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2$

$\Leftrightarrow -3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 1 \Leftrightarrow A = -1/3 \\ 6A - 2B = 0 \Leftrightarrow B = 3A = -1 \\ 2B - C = 0 \Leftrightarrow C = 2B = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$$

$$\therefore y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$$

(c) $h(x) = p(x)e^{\alpha x} = \text{polynom} \cdot e^{\alpha x}$

Gör substitutionen $y = ze^{\alpha x}$

$$\Rightarrow y'' + ay' + by = e^{\alpha x}(z'' + Cz' + Dz)$$

Så $y'' + ay' + by = p(x)e^{\alpha x} \Leftrightarrow \cancel{e^{\alpha x}}(z'' + Cz' + Dz) = p(x)\cancel{e^{\alpha x}}$

$\therefore$ Vi är tillbaka i (B)

<u>Ex.</u> Lös ODE:n $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$

<u>Lösn.</u>: (i) <u>Homogenlösn.</u>: Kar. ekv.: $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

(ii) <u>Partikulärlösn.</u>: Låt $y = ze^{-x}$

$$y' = z'e^{-x} - ze^{-x} = e^{-x}(z' - z)$$

$$y'' = z''e^{-x} - z'e^{-x} - z'e^{-x} + ze^{-x} = e^{-x}(z'' - 2z' + z)$$

$$\Rightarrow y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(z'' - 2z' + z) + 3e^{-x}(z' - z) + 2ze^{-x} =$$

$$= e^{-x}(z'' - 2z' + z + 3z' - 3z + 2z) = e^{-x}(z'' + z')$$

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} \Leftrightarrow \cancel{e^{-x}}(z'' + z') = x\cancel{e^{-x}}$$

$$\Rightarrow z'' + z' = x$$

Ansätt $z = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx$

$$\Rightarrow z' = 2Ax + B \ , \quad z'' = 2A$$

$$z'' + z' = 2A + 2Ax + B = x \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_p = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$y_p = z_p e^{-x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$$

$$\therefore y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)xe^{-x}$$

(D) $h(x) = p(x) \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases} = \text{polynom} \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$

Lös den s.k. <u>hjälpekvationen</u>

$$\mathcal{L}(u) = u'' + au' + bu = p(x)e^{i\beta x} \qquad (*)$$

enligt metoden i (C). Lösningen u_p kommer att bli komplexvärd, $u_p = \mathrm{Re}(u_p) + i\,\mathrm{Im}(u_p)$ och

$$\mathcal{L}(u_p) = \mathcal{L}(\mathrm{Re}(u_p)) + i\mathcal{L}(\mathrm{Im}(u_p))$$

Å andra sidan gäller att

$$p(x)e^{i\beta x} = p(x)\cos(\beta x) + ip(x)\sin(\beta x)$$

Vilket medför att

$$(*) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{Re}(u_p)) + i\mathcal{L}(\mathrm{Im}(u_p)) = p(x)\cos(\beta x) + ip(x)\sin(\beta x)$$

$$\therefore \begin{cases} \mathcal{L}(\mathrm{Re}(u_p)) = p(x)\cos(\beta x) \\ \mathcal{L}(\mathrm{Im}(u_p)) = p(x)\sin(\beta x) \end{cases}$$

<u>Ex.</u> Lös ODE:n $y'' + 2y' + y = 2\sin(x)$

Lösn.: (i) Homogenlösn.: Kar. ekv.: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$$

(ii) Partikulärlösn.: Studera hjälpekvationen

$$u'' + 2u' + u = 2e^{ix}$$

Låt $u = ze^{ix} \Rightarrow u' = z'e^{ix} + ize^{ix}$

$$u'' = z''e^{ix} + iz'e^{ix} + iz'e^{ix} - ze^{ix} = e^{ix}(z'' + 2iz' - z)$$

$$u'' + 2u' + u = e^{ix}(z'' + 2(1+i)z' + 2iz) = 2e^{ix}$$

$$\Rightarrow z'' + 2(1+i)z' + 2iz = 2 \leftarrow \text{konstant}$$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} z_p = \frac{2}{2i} = -i \Rightarrow u_p = z_p e^{ix} = -ie^{ix} =$$

$$= -i(\cos(x) + i\sin(x)) = \sin(x) - i\cos(x)$$

$$\Rightarrow y_p = \mathrm{Im}(u_p) = -\cos(x)$$

$$\therefore y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{-x} - \cos(x)$$

(E) $h(x) = p(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases} = \text{polynom}\cdot e^{\alpha x}\cdot\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$

Löses på samma sätt som i (D), dvs hitta en partikulärlösning u_p till hjälpekvationen

$$u'' + au' + bu = p(x)e^{(\alpha + i\beta)x}$$

Precis som tidigare gäller att

$\mathcal{L}(y) = p(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ har part. lösn. $y_p = \mathrm{Re}(u_p)$

$\mathcal{L}(y) = p(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ har part. lösn. $y_p = \mathrm{Im}(u_p)$

(F) $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ där h_1 och h_2 är någon av typerna (A)–(E)

Hitta partikulärlösningar till hjälpekvationerna

$$\mathcal{L}(u) = h_1(x) \quad \text{och} \quad \mathcal{L}(u) = h_2(x)$$

Där är $y_p = u_{p_1} + u_{p_2}$

<u>Ex</u>. Lös ODE:n $\mathcal{L}(y) = y'' + 2y' + y = x + 3 + 2\cos(x)$

<u>Lösn.</u>: (i) <u>Homogenlösn.</u>: Vet att $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$

(ii) <u>Partikulärlösn.</u>: Vi löser hjälpekvationerna

I. $\mathcal{L}(u) = x + 3$ II. $\mathcal{L}(u) = 2\cos(x)$

var för sig.

I. $u'' + 2u' + u = x + 3$. Ansats: $u = Ax + B$

$\Rightarrow u' = A,\ u'' = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_{p_1} = x + 1$

II. $u'' + 2u' + u = 2\cos(x)$.

Vet från ex. ovan: $u_{p_2} = \sin(x)$

$\Rightarrow y_p = u_{p_1} + u_{p_2} = x + 1 + \sin(x)$

$\therefore y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x + 1 + \sin(x)$