Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 5.1

Repetition:

- Partikulärlösningar till

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

då högerledet är:

(A) $h(x) = $ konstant

(B) $h(x) = $ polynom

(C) $h(x) = \text{polynom} \cdot e^{\alpha x}$

(D) $h(x) = \text{polynom} \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$

(E) $h(x) = \text{polynom} \cdot e^{\alpha x} \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$

(F) $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ där h_1, h_2 någon av (A)–(E)

Idag:

* Talföljder och konvergens

* Serier

Talföljder och konvergens: (9.1)

Definition: En följd/sekvens av tal kallas för en **talföljd** (eng.: sequence). Skrivs $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eller bara $\{a_n\}$.

Ex. (a) $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\} = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(b) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^j\right\}_{j=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^j\right\} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots$

(d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \implies$

$\Rightarrow \{a_n\} = 1, \sqrt{7}, \sqrt{6+\sqrt{7}}, \ldots$

(e) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

den s.k. Fibonacci-talföljden

Definition: För talföljder gäller följande terminologi:

(i) $\{a_n\}$ begränsad om $\exists M \in \mathbb{R}$ s.a. $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\{a_n\}$ positiv/negativ om $a_n \geq 0 / a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\{a_n\}$ växande om $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ avtagande om $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $\{a_n\}$ alternerande om $a_{n+1} \cdot a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ex. (a) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ begränsad, positiv, växande

(b) $\{(-1)^j j\} = -1, 2, -3, 4, \ldots$ alternerande (ej begränsad)

Adams använder termen ultimately decreasing/positive/...

för talföljder som blir avtagande/positiva/... då n

är stort

Ex. $\{n-100\} = -99, -98, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

är ultimately positive

Konvergens av talföljder: (9.1)

Definition: $\{a_n\}$ är konvergent med gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$

om $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dvs

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.a. } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Ex. Är talföljden $\{a_n\} = \{n \arctan(\frac{1}{n})\}$ konvergent?

Lösn.: Vill beräkna: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \arctan(\frac{1}{n}) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \{\text{l'Hopital}\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

$\therefore$ $\{n \arctan(\frac{1}{n})\}$ konvergent med gränsvärdet 1

Serier: (9.2)

Givet en talföljd $\{a_n\}$ kan vi bilda en ny talföljd $\{s_n\}$ genom att sätta

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

Definition: $\lim_{n\to\infty} s_n$ kallas för en serie (dvs en summa med oändligt många termer). Talen a_k kallas för seriens termer och talen s_n för dess delsummor (eng.: partial sums). Vi skriver serien som

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar säger vi att serien är konvergent, annars divergent. Gränsvärden $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ för en konvergent serie kallas för dess summa.

En viktig klass av serier som ofta dyker upp är s.k. geometriska serier.

Definition: En talföljd sägs vara geometrisk om den är av formen

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$$

Varje delsumma

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

är alltså en geometrisk summa.

Vi vet att: $s_n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Detta ger oss:

Sats: En geometrisk serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| \geq 1$. Om den är konvergent har den summan

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Ex. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Ex. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^k$ divergent då $|-3| = 3 > 1$

Sats: Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent, så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bevis: Låt $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ och sätt $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Då gäller att:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s - s = 0 \quad \blacksquare$$

Ex. Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ konvergent eller divergent?

Lösn.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \Rightarrow a_n = \frac{n}{2n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \text{ divergent}$$

Ex. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergent eller divergent?

Lösn.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ då $n \to \infty$ Hmm...

Partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \iff 1 = A(k+1) + Bk$$

$\underline{k=0}$: $\quad 1 = A$

$\underline{k=-1}$: $\quad 1 = -B \iff B = -1$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

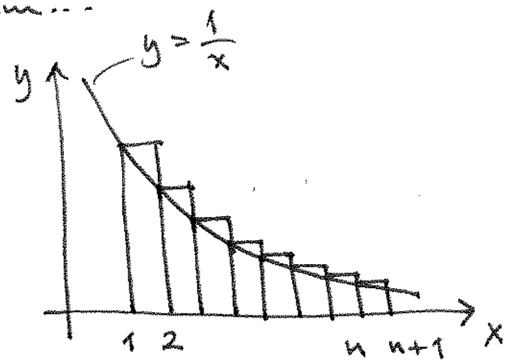
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$ en s.k. <u>teleskopsumma</u>

$\therefore\ S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ så $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

<u>Ex.</u> Är den s.k. <u>harmoniska</u> <u>serien</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent eller divergent?

<u>Lösn.</u>: $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ då $n \to \infty$ Hmm...



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} =$$

= summa area rektanglar i figuren:

$>$ Area under $y = \frac{1}{x}$. $1 \leq x \leq n+1$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$\Rightarrow S_n \to \infty$ då $n \to \infty$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.