Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 5.2

Repetition:

- Definition: En talföljd $\{a_n\}$ är en följd av tal. Denna kan vara begränsad, positiv, växande, alternerande, ...

  $\{a_n\}$ konvergent med gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ om $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

- Definition: En summa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ med oändligt många termer kallas för en serie, a_k seriens termer, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ seriens delsummor.

  Om $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existerar är serien konvergent, annars divergent. Om serien är konvergent är s seriens summa.

- Sats: En geometrisk serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent om $|x| < 1$ med summan

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

- Den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent.

Idag:

* Konvergenskriterier

Konvergenskriterier: (9.3)

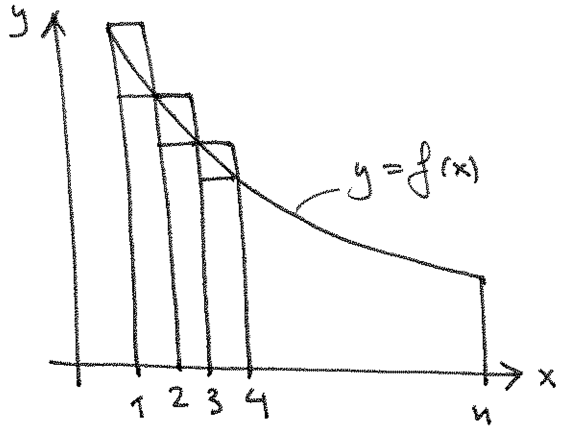
Sats: (Integralkriteriet) Antag att f är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$. Då är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

konvergent, om och endast om

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

är konvergent.



<u>Bevis</u>: Delar vi in intervallet $[1, n]$ i n delar av längd 1 och approximerar integralen

$$\int_1^{n} f(x)\,dx$$

med rektanglar, får vi å ena sidan att

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots + f(n)\cdot 1 = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx$$

och å andra sidan att

$$\int_1^{n} f(x)\,dx \leq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n-1)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

dvs sammantaget

$$\int_1^{n} f(x) + f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx + f(1).$$

Låter vi $n \to \infty$ ser vi alltså att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

är konvergent om och endast om

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

är konvergent. $\boxed{}$

Ex. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+2k^2}$ konvergent eller divergent?

Lösn.: $f(x) = \frac{x}{1+2x^2}$ kont. och positiv då $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{1+2x^2 - x\cdot 4x}{(1+2x^2)^2} = \frac{1-2x^2}{(1+2x^2)^2} < 0 \quad \text{då } x \geq 1$$

så f är avtagande då $x \geq 1$

$$\int_1^N \frac{x}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^N \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln(1+2x^2)\right]_1^N =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(1+2N^2) - \ln(3)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

Integralkriteriet $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+2k^2}$ divergent

Ex. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$ konvergent eller divergent?

Lösn.: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ kont., positiv & avtagande då $x \geq 1$

Vet att $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{Div} & \text{om } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{Konv.} & \text{om } \alpha > 1 \end{cases}$

Integralkriteriet $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ är konvergent om $\alpha > 1$.

Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är alltså precis på gränsen till att bli konvergent.

Man kan visa att $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0.5722\ldots$

Denna konstant kallas för Eulers konstant och dyker upp i många olika sammanhang.

Jämförelsekriteriet: Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är två talföljder och $\exists K \in \mathbb{R}$ s.a. $0 \le a_n \le K b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ så gäller att:

(a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

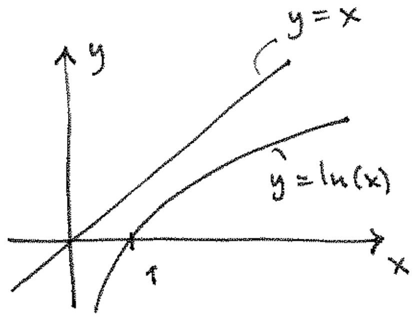
(b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ så $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

Ex. Är följande serier konvergenta eller divergenta?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Lösn.: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergent



(b) $\ln(x) < x$ då $x \ge 2 \iff$

$\iff \frac{1}{\ln(x)} > \frac{1}{x}$ då $x \ge 2$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ divergent

Korollarium: Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ positiva talföljder s.a. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ där $0 \le L \le \infty$ så gäller att:

(a) Om $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

(b) Om $0 < L \le \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

Ex. Är följande serier konvergenta eller divergenta

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$

Lösn.: (a) Då n är stort är $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ jämförbar med $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty \overset{\text{Kurs.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \text{ divergent}$$

(b) Då n är stort är $\frac{n+5}{n^3-2n+3}$ jämförbar med $\frac{1}{n^2}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{n^3-2n+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{5}{n})}{n^3(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3})} = 1 < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergent} \overset{\text{Kurs.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3} \text{ konvergent}$$

Sats: (~~Rot~~ Kvot kriteriet) Antag att $a_n > 0$ för stora n och låt

$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Då gäller att:

(a) Om $0 \le \rho < 1$ så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

(b) Om $1 < \rho \le \infty$, så $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

(c) Om $\rho = 1$ så kan ingen slutsats dras

Bevis: (a) Om $0 \le \rho < 1$ så $\exists r \in \mathbb{R}$ s.a. $\rho < r < 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r$ då n stort dvs $\forall n \ge N$ för något stort $N \in \mathbb{N}$

Detta ger:

$$a_{N+1} \leqslant r a_N$$

$$a_{N+2} \leqslant r a_{N+1} \leqslant r^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} \leqslant \dots \leqslant r^k a_N$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} a_n}_{= C < \infty} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqslant C + \sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k < \infty$$

då $0 \leqslant r < 1$.

(b) Om $\rho > 1$ så $\exists r \in \mathbb{R}$ s.a. $1 < r < \rho$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant r$$ då n stort dvs $\forall n \geqslant N$ för något stort $N \in \mathbb{N}$

På samma sätt som i (a) följer att: $a_{N+k} \geqslant r^k a_N$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{N+k} \geqslant \lim_{k\to\infty} r^k a_N = \{r > 1\} = \infty$$

(c) Vet att: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div. men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

För båda dessa gäller att: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ■

Ex. Är följande serier konvergenta eller divergenta?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Lösn.: (a) $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{konvergent}$$

(b) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \Big/ \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 4 > 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{divergent}$$