Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 5.3

Repetition:

- Sats: (Integralkriteriet) Om f kont., positiv & avtagande då $x \geq 1$, så

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konv.} \iff \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konv.}$$

- Sats: Om $\{a_n\}, \{b_n\}$ s.a. $\exists K \in \mathbb{R}$ s.a. $0 \leq a_n \leq K b_n$, så

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div.

- Korollarium: Om $\{a_n\}, \{b_n\}$ positiva och s.a.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ där $0 \leq L \leq \infty$, så

(a) $L < \infty$ & $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

(b) $0 < L \leq \infty$ & $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

- Sats: (Kvotkriteriet) Om $a_n > 0$ då n stort och

$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, så

(a) $0 \leq \rho < 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

(b) $1 < \rho \leq \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

(c) $\rho = 1$ $\Rightarrow$ Ingen slutsats kan dras

Idag:

* Rotkriteriet
* Absolut- och betingad konvergens
* Potensserier

Rotkriteriet: (9.3)

Sats: (Rotkriteriet) Antag att $a_n > 0$ för stora n och låt $\sigma = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$. Då gäller att:

(a) Om $0 \leq \sigma < 1$ så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

(b) Om $1 < \sigma \leq \infty$ så $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

(c) Om $\sigma = 1$ så kan ingen slutsats dras.

Ex. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergent eller divergent?

Lösn.: $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\overset{\text{Rot.krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergent

Absolut och betingad konvergens: (9.4)

Definition: (i) En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs vara absolutkonvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

(ii) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, men inte absolutkonvergent sägs serien vara betingat konvergent, (eng.: conditionally convergent).

Alla våra kriterier hittills har behandlat positiva serier dvs $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dessa kriterier funkar för att kolla om en serie är absolutkonvergent.

För att kontrollera betingad konv. har vi följande kriterium.

Sats: Antag att $\{a_n\}$ är en talföljd s.a.

(i) $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ för stora n

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ för stora n

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

Ex. Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(\pi n)}{n}$ absolut konv., betingat konvergent, eller divergent?

Lösn.: $\cos(\pi n) = (-1)^n \Rightarrow -\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{-\cos(\pi n)}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{ej abs. konv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(\pi n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

(i) $a_n \cdot a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = |a_n| \quad \forall n \geq 1$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(\pi n)}{n}$ betingat konvergent

Vi har följande (häftiga!) sats:

Sats: (a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut-konv. så kommer summan att bli densamma oavsett i vilken ordning man summerar termerna.

(b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är betingat konv. och $-\infty \leq L \leq \infty$ så kan man alltid omordna termerna i serien så att summan blir L.

Potensserier: (9.5)

Definition: En serie av formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

är en potensserie med centrum i $c \in \mathbb{R}$. Talen $a_0, a_1, a_2, \dots$ kallas för potensseriens koefficienter.

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ är en potensserie med centrum i 0 och koeff. $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Vi vet att $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ är konv. med summan $\frac{1}{1-x}$ då $|x| < 1$.

Sats: För en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gäller alltid ett av följande fall:

I. Serien konvergerar bara då $x = c$

II. Serien konvergerar $\forall x \in \mathbb{R}$

III. $\exists R > 0$ s.a. serien konv. $\forall x$ s.a. $|x-c| < R$ och divergerar $\forall x$ s.a. $|x-c| > R$. $|x-c| = R$ får behandlas separat.

Talet R kallas för potensseriens konvergensradie, och intervallet $|x-c| < R$ för dess konvergensintervall.

M.h.a. kvotkriteriet kan man visa att

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{där} \quad L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Ex. Bestäm centrum, konv. radie och konv. intervall för

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n}$$

Lösn.: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+\frac{5}{2})^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1}\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^n$

$\Rightarrow$ Centrum $= -\frac{5}{2}$, $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1} \Big/ \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n^2+1}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{3^n}{2^n}\cdot\frac{n^2+1}{1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Konv. radie $= \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x+\frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}_{=-4} < x < \underbrace{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}_{=-1}$$

$x=-4$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-8+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} < \infty$

$x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2+5)^n}{(n^2+1)\cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \infty$

$\Rightarrow$ Konv. intervall $= [-4, -1]$

Potensserier kan multipliceras, deriveras och integreras (termvis) på sina konvergensintervall

Ex. Utveckla funktionerna

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (b) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (c) $\ln(1+x)$

i potensserier genom att utgå från

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{då } |x| < 1 \qquad (*)$$

Lösn.: (a) Derivera (*) m.a.p. x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \, . \quad |x| < 1 \qquad (**)$$

(b) Derivera (**) m.a.p. x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \, . \quad |x| < 1$$

(c) Låt $t = -x$ i (*):

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$$

Integrera från 0 till x:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \, . \quad |x| < 1$$

Vet att konvergent även då $x = 1$ vilket ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$