Envariabelsanalys Z & TD, ht2017. Föreläsning 6.1

Repetition:

- **Sats:** (Rotkriteriet) Om $a_n > 0$ då n stort och $\sigma = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ så

  (a) $0 \leq \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

  (b) $1 < \sigma \leq \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

  (c) $\sigma = 1 \Rightarrow$ Ingen slutsats kan dras

- **Definition:** (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonv. om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.

  (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betingat konv. om konv. men ej abs. konv.

- **Sats:** Om $\{a_n\}$ s.a.

  I. $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ för stora n

  II. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ för stora n

  III. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

  så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

- **Definition:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ potensserie med centrum $c \in \mathbb{R}$ och koefficienter $\{a_n\}$.

- **Sats:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konv. $\forall x$ s.a. $|x-c| < R$ där

  $R = \frac{1}{L}$, $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

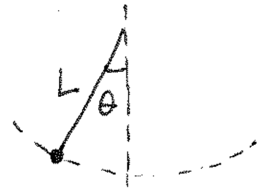
Idag:

* Taylor- och Maclaurinutvecklingar

Taylor- & Maclaurinutvecklingar: (9.6)

Motivering: I många sammanhang stöter man på problem som inte går, eller är mycket svåra, att lösa analytiskt. Ett klassiskt ex. ges av små svängningar av en pendel. Den ODE modellerar detta ges av

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (*)$$



där $\theta(t)$ – vinkeln vid tiden t, $g = 9.8\ m/s^2$
L = pendelns längd.

Oftast räcker det dock med en approximativ lösning. För $(*)$ innebär detta att man använder $\sin\theta \approx \theta$ för små θ.

Taylor-/Maclaurinutvecklingar är ett systematiskt sätt att approximera en godtycklig funktion med ett polynom.

Antag att vi har en funktion f för vilken $f^{(k)}(c)$ är känd $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. T.ex. $f(x) = e^x$ med $c = 0$ (eller $\sin(x)$ med $c = 0, \frac{m\pi}{2}$ $m \in \mathbb{Z}$, eller $\cos(x)$ ...)

Den enklaste formen av polynom är $p(x) = C$ konstant

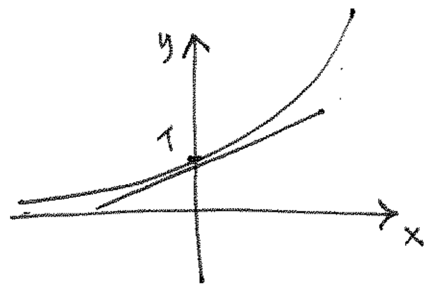
Om vi ska appr. $f(x)$ med $p(x)$ kring $x = 0$ bör vi välja C så att $p(0) = f(0)$, dvs $p(x) = f(0)$

Ex. $f(x) = e^x \Rightarrow p(x) = 1$ nära $x = 0$ (mycket grov appr.)

Varför nöja sig med en konstant? Approximera f med ett förstagradspolynom, $p(x) = Ax + B$

Bäst appr. om:

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p'(0) = f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = f(0) \\ A = f'(0) \end{cases}$$



$$\rightarrow p(x) = f(0) + f'(0)x$$

<u>Ex.</u> $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1,\ f'(0) = 1 \Rightarrow p(x) = 1 + x$

Varför nöja sig med ett förstagradspolynom? Approximera f med ett andragradspolynom. $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Bäst appr. om:

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p'(0) = f'(0) \\ p''(0) = f''(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = f(0) \\ B = f'(0) \\ 2A = f''(0) \end{cases} \rightarrow p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

<u>Ex.</u> $f(x) = e^x \Rightarrow p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Varför nöja sig med ett andragradspolynom? ...

Bästa tredjegradspolynomet:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Hur länge kan vi fortsätta? Svar: Så länge som f är deriverbar och $f^{(k)}(0)$ är känd. Om $f^{(k)}(0)$ är känd $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ får vi att

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Högerledet kallas för ett Maclaurinpolynom av grad n.

Om $f^{(k)}(c)$ är känd $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ och vi utför samma resonemang med $x = c$ istället för $x = 0$ får vi:

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Högerledet kallas för ett <u>Taylorpolynom</u> av grad n.

Vad händer om $f(x)$ är ∞ många gånger deriverbar?

Svar: Vi får en potensserie och $\approx$ blir $=$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{där} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Vi vet att konv. intervallet dessa potensserier ges av $|x| < R$ där $R = \frac{1}{L}$, $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

<u>Ex.</u> $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$

$$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

$$\therefore \; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Ex.</u> $f(x) = \sin(x)$, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, ...

$$\therefore \; \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \Big/ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} = 0$$

$$\therefore \; \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex. Approximera $f(x)=e^x$ med ett Taylorpolynom av grad 2 kring $x=1$.

Lösn.: $f(x)=e^x \Rightarrow f'(1)=f''(1)=e^1=e \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2=$$

$$=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2=e\left(1+x-1+\frac{1}{2}(x^2-2x+1)\right)=$$

$$=\frac{e}{2}(x^2+1)$$

I allmänhet är det svårt att beräkna T-/M-utvecklingar genom att utgå från definitionen.

Ex. Utveckla $f(x)=e^{x^2}$ i en Maclaurinserie

Lösn.: $f'(x)=2xe^{x^2}$, $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$, $f^{(3)}(x)=\ldots$ Bläää!

Som tur är har vi:

Sats: Antag att potensserien

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (*)$$

konv. då $|x-c|<R$. Då gäller alltid att $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ dvs $(*)$ är en T-/M-utveckling av f kring $x=c$.

"Bevis": $(*) \Leftrightarrow f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots$

$x=c$: $f(c)=a_0 \Leftrightarrow a_0=f(c)$

Derivera båda leden i $(*)$ m.a.p. x:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+\ldots \qquad (**)$$

$x=c$: $f'(c)=a_1 \Leftrightarrow a_1=f'(c)$

Derivera båda leden i $(**)$ m.a.p. x:

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-c)+3\cdot 4a_4(x-c)^2+\ldots$$

$\underline{x=c}:\quad f''(c) = 2a_2 \iff a_2 = \dfrac{f''(c)}{2}$

$\vdots$

$\underline{x=c}:\quad f^{(n)}(c) = n!\,a_n \iff a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} \qquad \blacksquare$

$\therefore$ Oavsett hur vi uttrycker en funktion i en potensserie, så kommer detta att bli en T-/M-utveckling av funktionen.

$\underline{\text{Ex.}}$ Utveckla $f(x) = e^{x^2}$ i en Maclaurinserie

$\underline{\text{Lösn.}}$: Vet att $\quad e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Låt $t = x^2$: $\quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

Vet från förra gången att $f(x) = \ln(x+1)$ har Maclaurinserien

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad -1 < x \leq 1 \quad (\star)$$

$\underline{\text{Ex.}}$ Utveckla $f(x) = \ln(x)$ i en Taylorserie kring $x = 2$. Vad är seriens konvergensintervall?

$\underline{\text{Lösn.}}$: $\ln(x) = \ln(2 + x - 2) = \ln\left(2\left(1 + \dfrac{x-2}{2}\right)\right) =$

$= \ln(2) + \ln\left(1 + \dfrac{x-2}{2}\right) = \left\{t = \dfrac{x-2}{2}\right\} = \ln(2) + \ln(1+t)$

Utveckla kring $x = 2 \iff$ Utveckla kring $t = 0$

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \ln(x) = \ln(2) + \frac{x-2}{1\cdot 2^1} - \frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3\cdot 2^3} - \frac{(x-2)^4}{4\cdot 2^4} + \ldots =$$

$$= \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$$

$(\star) \Rightarrow$ konv. då $-1 < t \leq 1 \iff -1 < \dfrac{x-2}{2} \leq 1 \iff -2 < x-2 \leq 2$

$\iff 0 < x \leq 4$

$\therefore$ Konv. intervall $= (0, 4]$