Envariabelsanalys Z&TD, ht2017. Föreläsning 6.2

Repetition:

- Definition: (i) Om f n ggr. deriverbar kring $x=0$ så ges Maclaurinpolynomet av ordning n till f av

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \approx f(x)$$

Om f ∞ deriverbar så ges Maclaurinserien till f av

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(x) \text{ då } |x|<R$$

(ii) Om f n ggr. deriverbar kring $x=c$ så ges Taylorpolynomet av ordning n till f kring $x=c$ av

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2}(x-c)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \approx f(x)$$

Om ∞ deriverbar så ges Taylorserien till f kring $x=c$ av

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2}(x-c)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(x) \text{ då } |x-c|<R$$

- Sats: Om $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ då $|x-c|<R$ så

$a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ dvs $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ Taylorutv. av f kring $x=c$.

Idag:

* Standardutvecklingar
* Tillämpningar av Taylor/Maclaurin

Standardutvecklingar: (9.6)

Sats: Vi har följande standardutvecklingar:

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad -1 < x \leq 1$

5. $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1$

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n . \quad |x| < 1$$

Dessa kommer att finnas på ett formelblad på tentan.

Vi har redan härlett 1, 2 och 4. 3 visas på samma sätt som 2. 6 är den s.k. binomialsatsen.

<u>Bevis av 5</u>: Vet att: $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \quad |t| < 1$

Låt $t = -s^2$: $\frac{1}{1+s^2} = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + \dots$

Integrera från 0 till x:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x (1 + s^2 + s^4 + s^6 + \dots) ds =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

<u>Tillämpningar av T/M</u>: (9.7)

(i) <u>Feluppskattningar</u>: Vi härledde T/M-polynom med motiveringen att man ofta behöver approximera en funktion f med ett polynom p. En naturlig fråga är:

Hur stort fel begår vi när vi ersätter $f(x)$ med $p(x)$?

För detta behöver vi följande:

Sats: Antag att f och dess derivator t.o.m. ordning $n+1$ är kontinuerliga nära $x=c$. Då gäller att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad \text{nära } c$$

där ξ är ett tal mellan c och x.

$\therefore$ Om vi använder polynomet

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

istället för $f(x)$, begår vi felet

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Detta fel kan uppskattas för att få en hum om storleksordningen.

Ex. Hur stort fel begår man som mest om man använder $\sin(x) \approx x$ till att beräkna $\sin(0.1)$?

Lösn.: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f' = \cos(x)$, $f'' = -\sin(x)$, $f^{(3)} = -\cos(x)$

$$\overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} \sin(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 =$$

$$= x - \frac{\cos(\xi)}{6}x^3. \quad \xi \text{ tal mellan } 0 \text{ och } x$$

$$\Rightarrow |\sin(0.1) - 0.1| = \left| -\frac{\cos(\xi)}{6} \cdot (0.1)^3 \right| =$$

$$= \frac{|\cos(\xi)|}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \leq \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}$$

$\therefore$ Felet är $\frac{1}{6} \cdot 10^{-3}$ som störst.

Detta kan också användas för att få mer allmänna uppskattningar.

<u>Ex.</u> Visa att

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{8|x|^3}{3} \quad \text{om } |x| \leq \frac{1}{2}$$

<u>Bevis:</u> $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow \{\text{Sats}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6(1+\xi)^3}x^3. \quad \xi \text{ tal mellan } 0 \text{ och } x$$

$$\Rightarrow \left| \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 \right| = \left| \frac{2}{6(1+\xi)^3} x^3 \right| =$$

$$= \frac{1}{3|1+\xi|^3} |x|^3 \leq \left\{ \begin{array}{l} |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 1+\xi \text{ som} \\ \text{minst då } \xi = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} |x|^3 = \frac{8}{3}|x|^3 \quad \blacksquare$$

<u>Ex.</u> Hur många termer i Maclaurinutv. av $\ln(1+x)$ krävs för att beräkna $\ln(0.9)$ med ett fel som är mindre än $5 \cdot 10^{-5}$ (dvs 4 korrekta decimaler)

Lösn.: $\ln(0.9) = \ln(1+x)$ med $x = -0.1$

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f' = \frac{1}{1+x},\ f'' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ \ldots$$

$$\overset{\text{Sats}}{\Rightarrow} \ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}_{p_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |\ln(1+x) - p_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)|1+\xi|^{n+1}}$$

$x = -0.1 \Rightarrow 1+\xi$ som minst då $\xi = -0.1$

$$\Rightarrow \text{Vill hitta } n \text{ s.a. } \frac{0.1^{n+1}}{(n+1)\cdot 0.9^{n+1}} < 5\cdot 10^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} < 5\cdot 10^{-5}$$

Ok då $n=4$ eftersom $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^5 = \frac{1}{5}\left(\frac{1.5}{1.5\cdot 9}\right)^5 <$

$$< \frac{1.5^5}{5}\cdot 10^{-5} < 5\cdot 10^{-5}$$

$\therefore$ 5 termer krävs

(ii) Gränsvärden:

En annan viktig tillämpning av T/M är vid mer avancerade gränsvärdesberäkningar

Ex. Beräkna gränsvärdena

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x(\cos(x) - 1)}$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}$$

Løsn.: (a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x(\cos(x)-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots-\cancel{x}}{x\left(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots-\cancel{1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+\dots\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\dots\right)} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

(b) $$\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2} = \frac{\left(\cancel{1}+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\dots-\cancel{1}\right)\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\dots\right)}{\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^4}{4!}-\dots\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{x^4(2+2x+\dots)\left(1-\frac{x^3}{2}+\frac{x^6}{3}-\dots\right)}{\left(\frac{9x^2}{2}-\frac{3^4x^4}{4!}+\dots\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^4}(2+2x+\dots)\left(1-\frac{x^3}{2}+\frac{x^6}{3}-\dots\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{9}{2}-\frac{3^4x^2}{4!}+\dots\right)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2\cdot 1}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 2^2}{9^2} = \frac{8}{81}$$