Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 6.3

Repetition:

- Maclaurinutvecklingar av e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$ och $(1+x)^\alpha$ kommer att finnas på formelblad på tentan.

- Sats: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

  där ξ tal mellan c och x.

- Kan användas till feluppskattningar

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \leq \ldots$$

- T/M-utvecklingar mycket användbara vid mer avancerade gränsvärdesberäkningar.

Idag:

* Differentialekvationer och potensserier

Lösning av ODE:n med potensserier: (18.7)

Vi har gått igenom hur man löser 2:a ordningens linjära ODE:n med konstanta koeff. Med potensserier kan man (ibland) lätta på konst. koeff.-kravet. Metoden illustreras bäst med ett exempel.

Ex. Lös BVP $\begin{cases} xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Lösn.: Steg 1: Antag att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konv.-intervall $|x| < R$. Uttryck ODE:n i termer av en potensserie.

I vårt fall: $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} =$

$$= 0 + a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot x^1 + a_3 \cdot 3 \cdot x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, n(n+1)\, x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, n(n+1)\, x^n$$

$$\Rightarrow xy'' + y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} n(n+1) + a_{n+1}(n+1) - a_n \right) x^n \overset{\text{vill}}{=} 0$$

Steg 2: Identifiera koefficienter och använd begynnelsevillkor till att ta fram en explicit form för an (om möjligt).

I vårt fall: $a_{n+1} n(n+1) + a_{n+1}(n+1) - a_n = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}(n+1)(n+1) - a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2}$$

Vet att: $y(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{(0+1)^2} = \frac{1}{1^2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}, \quad a_4 = \frac{a_3}{4^2} = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{(n!)^2}$$

<u>Steg 3</u>: Beräkna konv. radien till potensserien

I vårt fall: $a_n = \frac{1}{(n!)^2} \Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

$$\therefore \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \quad \text{konv. } \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Anm.</u>: Denna metod fungerar även då man har konstanta koeff., den är bara onödigt krånglig i dessa fall. Antag t.ex. att vi har BVP

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

Denna har (den normala) lösningen $y(x) = \cos(x)$. Om vi hade löst den med potensserier hade vi fått:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dvs Maclaurinutvecklingen för $\cos(x)$.

En ODE som dyker upp inom elektrisk fältteori och kvantmekanik då man har cylindrisk symmetri är <u>Bessels</u> <u>diff.ekv.</u>

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Dessa lösningar kommer att bero på n och brukar skrivas $J_n(x)$ $(= y_n(x))$

<u>Ex.</u> Lös BVP $\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

dvs bestäm $J_0(x)$.

<u>Lösn.</u>: Antag att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $|x| < R$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$\Rightarrow xy'' + y' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underline{x^{n+1}} \leftarrow \text{ej ok!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} n = k-2 \\ n=0 \Leftrightarrow k=2 \end{array} \right\} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow xy'' + y' + xy = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n n(n-1) + a_n n + a_{n-2}\right) x^{n-1} =$$

$$= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n \cdot n^2 + a_{n-2}\right) x^{n-1} \overset{\text{vill}}{=} 0$$

Därtill, $y(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{1}{2^2} \quad , \quad a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = (-1)^2 \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} = (-1)^2 \frac{1}{(2^2)^2 \cdot 2^2} \quad , \quad a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} = (-1)^3 \frac{1}{(2^2)^3 (2\cdot 3)^2} \quad , \quad a_7 = 0$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{8^2} = (-1)^4 \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} = (-1)^4 \frac{1}{(2^2)^4 (2\cdot 3\cdot 4)^2} \quad , \quad a_9 = 0$$

$$a_{10} = \ldots = \frac{(-1)^5}{(2^2)^5 (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^2} \quad , \quad a_{11} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2^2)^n \cdot (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (n!)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = \{t = x^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} t^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2} (n!)^2}{2^{2n} ((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} = 0$$

$$\therefore \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Fallet $n=1$ löses i Adams)