Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Föreläsning 7.3

Ex. Visa att $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^p}$ är konvergent då $p>1$

och divergent då $0<p\leq 1$

Bevis: Låt $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^p}$ $\quad p>0$

Klart att f kontinuerlig, positiv och avtagande då $x \geq 2$.

Integralkriteriet: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ konvergent

$$\Longleftrightarrow$$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx$ konvergent

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x), \quad x=2 \Leftrightarrow t=\ln(2) \\ dt = \frac{1}{x}dx, \quad x\to\infty \Leftrightarrow t\to\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \begin{cases} \text{Konv. om } p>1 \\ \text{Div. om } 0<p\leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ex. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ konvergent eller divergent? Motivera!

Lösn.: Vet att $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad -1<x\leq 1$

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3 - \dots$ då ~~xxxxx~~ $k \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \dots$

$\Rightarrow$ Jämför med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \ldots}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3k} + \ldots\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$L < \infty \ \& \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \text{ konv.}$$

Ex. Beräkna summan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-3k-2}$$

Lösn.: $9k^2-3k-2 = 9\left(k^2 - \frac{1}{3}k - \frac{2}{9}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{8}{36}} = \frac{1}{6} \pm \frac{3}{6} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3}, \ k_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 9k^2-3k-2 = 9\left(k-\frac{2}{3}\right)\left(k+\frac{1}{3}\right) = (3k-2)(3k+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-3k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(3k+1) + B(3k-2)$$

$k = 2/3$: $1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3$

$\underline{k = -1/3:}$ $1 = -3B \iff B = -1/3$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2-3k-2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)} \right) = \frac{1}{3}$$

<u>Ex.</u> Beräkna summan: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k \cdot k}$

<u>Lösn.</u>: Vet att: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$

då $-1 < x \leq 1$

$\underline{x = \frac{1}{2} \in (-1, 1]:}$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k \cdot k} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

<u>Ex.</u> Visa att $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

<u>Bevis</u>: Vet att $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Euler: Vad händer om vi låter $t = ix$. $i = \sqrt{-1}$?

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k \text{ jämn}} \frac{(i)^k x^k}{k!} + \sum_{k \text{ udda}} \frac{(i)^k x^k}{k!} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} k \text{ jämn} & & k \text{ udda} \\ \Longleftrightarrow & ; & \Longleftrightarrow \\ k = 2n & & k = 2n+1 \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}_{\cos(x)} + i \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{\sin(x)} =$$

$$= \cos(x) + i \cdot \sin(x) \quad \blacksquare$$