Envariabelsanalys Z & TD, ht2017, Räkneövning 3.2

6.5.34 Avgör om $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ är konvergent eller divergent. Motivera!

Lösn.: Problem med både $x=0$ och $x=\infty$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\underbrace{x^2}_{\geq 0}} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \text{ konvergent}$$

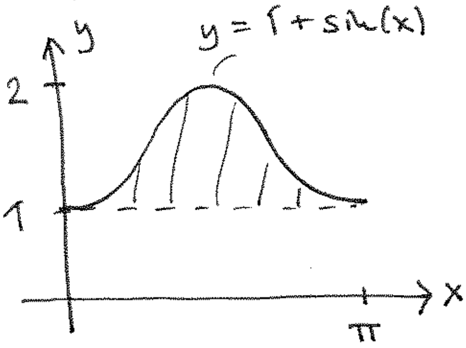
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}+x^2} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \text{ konvergent}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \text{ konvergent}$$

7.1.8 Beräkna volymen av den kropp som fås då området mellan $y=1+\sin(x)$, $y=1$, $x=0$ och $x=\pi$ roteras kring:

(a) x-axeln (b) y-axeln



Lösn.: (a) $V_x = \int_0^\pi \pi\left((1+\sin(x))^2 - 1^2\right)dx =$

$$= \pi\int_0^\pi \left(1+2\sin(x)+\sin^2(x)-1\right)dx =$$

$$= \pi \left(\left[-2\cos(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx \right) =$$

$$= \pi \left(4 + \frac{1}{2} \left[x - \cancel{\frac{\sin(2x)}{2}} \right]_0^{\pi} \right) = 4\pi + \frac{\pi^2}{2} \quad \text{v.e.}$$

(b) $$V_y = \int_0^{\pi} 2\pi x \left(1 + \sin(x) - 1 \right) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin(x)\, dx =$$

$$= 2\pi \left(-\left[x\cos(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)\, dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(\pi + \left[\sin(x) \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi^2 \quad \text{v.e.}$$

7.1.23 Området som begränsas av kurvorna $y = x^{-k}$, $y = 0$ och ligger till höger om $x = 1$ roteras kring y-axeln. Bestäm alla $k \in \mathbb{R}$ för vilka volymen av detta område är ändligt.

Lösn.: $$V_k = \int_1^{\infty} 2\pi x \cdot x^{-k}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} x^{1-k}\, dx$$

Två fall:

$k = 2$: $$V_2 = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{N \to \infty} 2\pi \left[\ln|x| \right]_1^{N} = \infty$$

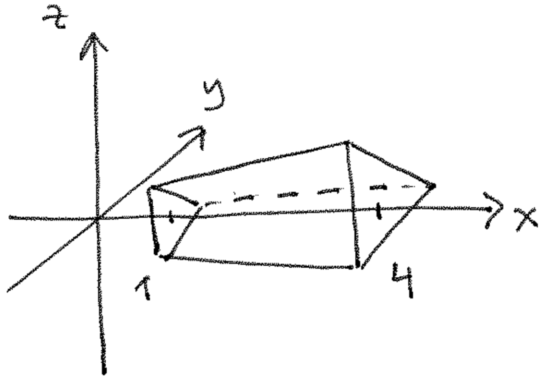
$k \neq 2$: $$V_k = 2\pi \int_1^{\infty} x^{1-k}\, dx = \lim_{N \to \infty} 2\pi \left[\frac{x^{2-k}}{2-k} \right]_1^{N} =$$

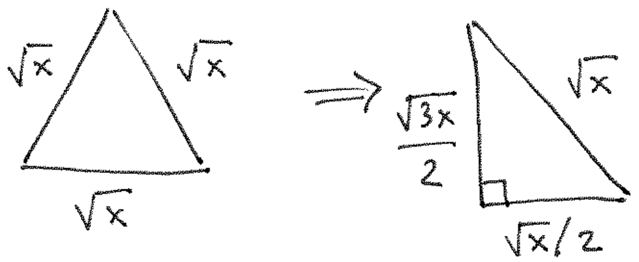
$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{k-2} & \text{om } k > 2 \\ \infty & \text{om } k < 2 \end{cases}$$

$\therefore$ Ändlig volym då $\alpha > 2$

7.2.6. En kropp ligger längs x-axeln från $x = 1$ till $x = 4$. Dess tvärsnitt i en punkt $x \in [1, 4]$ är en liksidig triangel med sidlängd $\sqrt{x}$. Bestäm kroppens volym.

Lösn.: Behöver beräkna tvärsnittsarean, $A(x)$, för en godtycklig punkt $x \in [1, 4]$





$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{3x}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_1^4 \frac{\sqrt{3}}{4} x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[x^2\right]_1^4 = \frac{15\sqrt{3}}{8} \text{ v.e.}$$