Envariabelsanalys Z & TD, ht 2017, Räkneövning 4.1

7.3.10 Beräkna längden av kurvan

$$y = x^2 - \frac{\ln(x)}{8}, \quad x \in [1,2]$$

Lösn.: $y' = 2x - \frac{1}{8x}$

$$(y')^2 = \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \frac{1}{64x^2} =$$

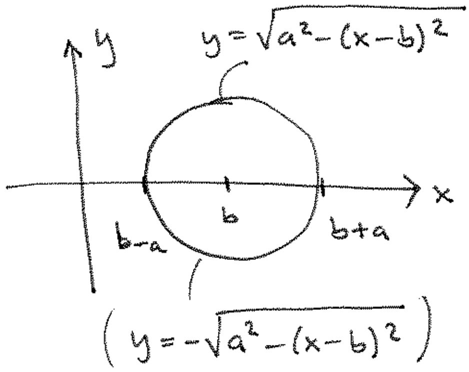
$$= 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\Rightarrow s = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_1^2 \left|2x + \frac{1}{8x}\right| dx =$$

$$= \left[x^2 + \frac{1}{8}\ln|x|\right]_1^2 = 4 + \frac{1}{8}\ln(2) - \left(1 + \frac{1}{8}\ln(1)\right) = 3 + \frac{1}{8}\ln(2) \text{ l.e.}$$

7.3.29 Beräkna ytarean av den ringformade kropp (torus) som fås då cirkeln $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ roteras kring y-axeln.



Lösn.: Area torus $= 2 S_y =$

$$= 2 \int_{b-a}^{b+a} 2\pi x \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

$$y'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{-\cancel{2}(x-b)}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = -\frac{x-b}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (y'(x))^2 = 1 + \frac{(x-b)^2}{a^2-(x-b)^2} = \frac{a^2}{a^2-(x-b)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Area torus} = 4\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{\frac{a^2}{a^2-(x-b)^2}}\, dx =$$

$$= 4\pi a \int_{b-a}^{b+a} \frac{x}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x-b, \; x = b-a \Leftrightarrow t = -a \\ dt = dx, \; x = b+a \Leftrightarrow t = a \end{array} \right\}$$

$$= 4\pi a \int_{-a}^{a} \frac{t+b}{\sqrt{a^2-t^2}}\, dt =$$

$$= 4\pi a \Big(\underbrace{\cancel{\int_{-a}^{a} \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\, dt}}_{=0 \text{ udda fkn}} + b \int_{-a}^{a} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}}_{\text{jämn fkn.}}\, dt \Big) =$$

$$= 8\pi ab \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}}\, dt = 8\pi b \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}\, dt =$$

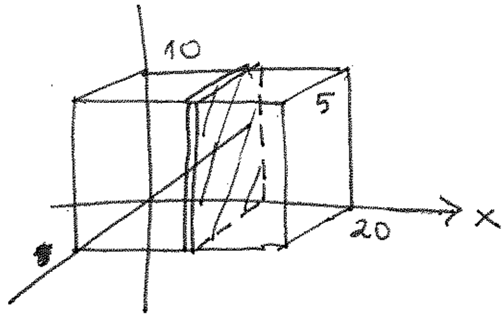
$$= 8\pi b \left[a \cdot \arcsin\left(\frac{t}{a}\right) \right]_0^a =$$

$$= 8\pi ab \left(\arcsin(1) - \arcsin(0) \right) = 8\pi ab \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 4\pi^2 ab \text{ a.e.}$$

7.4.10 Ett rätblock har dimensionerna 20 cm, 10 cm och 5 cm. Beräkna blockets massa om dess densitet på avståndet x cm från en av dess ~~sidor~~ 10×5 sidor ges av $\rho(x) = \alpha x$ g/cm^3.

Lösn.: $dm = \rho(x)\,dV = \rho(x)\,A(x)\,dx =$

$= \rho(x) \cdot 50\,dx$



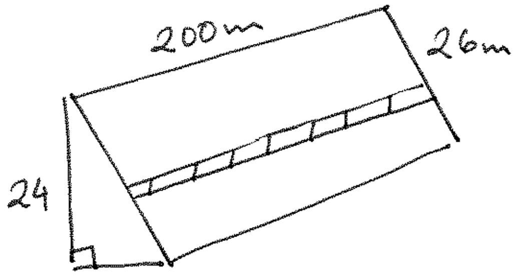
$\Rightarrow m = \int_0^{20} \rho(x)\,50\,dx =$

$= 50k \int_0^{20} x\,dx = 25k\,[x^2]_0^{20} = 25k \cdot 400 =$

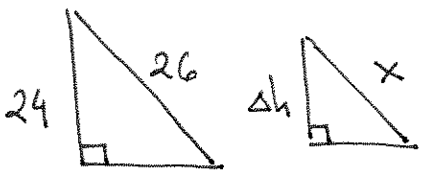
$= 10000k$ g $= 10k$ kg

7.6.3 En 200 m lång och 24 m hög damm har en 26 m lång, vinklad yta.

Beräkna den totala kraften på dammen då den är fylld med vatten ända upp till kanten.



Lösn.: $\dfrac{x}{26} = \dfrac{\Delta h}{24} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x = \dfrac{26}{24}\Delta h \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta A = 200x = 200 \cdot \dfrac{26}{24}\Delta h = \dfrac{1300}{6}\Delta h$

$\Rightarrow \Delta F = \rho g h \Delta A = \dfrac{1300}{6}\rho g h \Delta h \Rightarrow$

$\Rightarrow F \approx \sum \Delta F = \sum \dfrac{1300}{6}\rho g h \Delta h$

$\therefore F = \int_0^{24} \dfrac{1300}{6}\rho g h\,dh = \dfrac{1300\rho g}{6}\left[\dfrac{h^2}{2}\right]_0^{24} =$

$$= \frac{1300 \rho g}{12} \cdot 24^2 = 1300 \cdot 48 \rho g \approx 6.12 \cdot 10^8 \text{ N}$$