Envariabelsanalys Z & TD, ht2017. Räkneövning 5.2

9.1.6 Avgör om serien $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ är

(a) Begränsad

(b) Positiv eller negativ

(c) Växande eller avtagande eller alternerande

(d) Konvergent eller divergent

Lösn.: $\frac{e^n}{\pi^n} = \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$, $0 < \frac{e}{\pi} < 1$ så

(a) $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}$ begränsad

(b) Positiv

(c) Avtagande

(d) Konvergent mot 0

9.1.25 Beräkna gränsvärdet av talföljden

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right\}$$

Lösn.: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

9.2.10 Beräkna serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$ eller visa att den divergerar.

Lösn.: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{9\cdot 3^n}+\frac{2^n}{9\cdot 3^n}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

9.2.16 Beräkna serien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}$ eller visa att den divergerar

Lösn.: Vet att om $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergent. så $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

I vårt fall: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1\neq 0$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2} \text{ divergent}$$

9.2.30 Bevisa följande påstående om det är sant, eller ge ett motexempel om det är falskt.

Påst.: Om $\sum a_n$ är divergent och $\{b_n\}$ är begr. så är $\sum a_n b_n$ divergent.

Motex.: Låt $a_n=\frac{1}{n}$ så $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

och låt $\{b_n\}=\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ så $|b_n|\leq\frac{1}{2}$

Då $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Partialbråksuppdela:

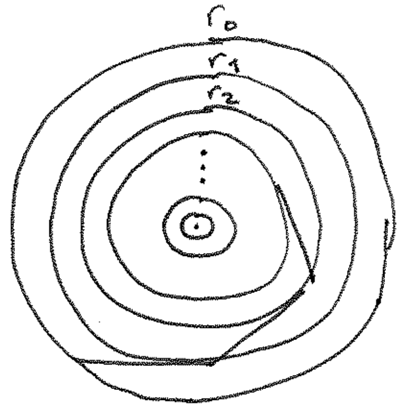
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\iff 1=A(n+1)+Bn$$

$n=0$: $1=A$

$\underline{n=-1}$: $1=-B \iff B=-1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 \quad \blacksquare$$



<u>Bonus</u>: Man har en oändlig följd av koncentriska cirklar (dvs cirklar med samma centrum) då radierna

$$r_0, r_1, r_2, \ldots$$

bildar en geometrisk talföljd med kvoten k, $0<k<1$. Från en punkt på den yttersta cirkeln dras en tangent till cirkeln närmast innanför, från tangeringspunkten en tangent till nästa cirkel, osv. Beteckna tangenternas längder med $l_0, l_1, l_2, \ldots$ Bestäm kvoten k så att summan av serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i$$

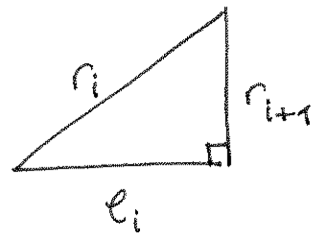
blir lika med den yttersta cirkelns omkrets.

<u>Lösn.</u>: Vi har att: $r_1 = r_0 k$, $r_2 = r_1 k = r_0 k^2$, $r_3 = r_0 k^3$, ...

dvs den geometriska talföljden $(r_0 k^i)_{i=0}^{\infty}$

Vill uttrycka l_i i termer av r_i

Pyth. sats: $\ell_i = \sqrt{r_i^2 - r_{i+1}^2} =$



$= \sqrt{r_i^2\left(1 - \left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^2\right)} = r_i\sqrt{1-k^2} =$

$= r_0 k^i \sqrt{1-k^2}$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \ell_i = r_0\sqrt{1-k^2}\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \{0 < k < 1\} =$$

$$= r_0\sqrt{1-k^2}\cdot\frac{1}{1-k}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ell_i = 2\pi r_0 \iff \cancel{r_0}\sqrt{1-k^2}\cdot\frac{1}{1-k} = 2\pi\cancel{r_0} \iff$$

$$\iff \sqrt{1-k^2} = 2\pi(1-k) \rightarrow 1-k^2 = 4\pi^2(1-k)^2$$

$$\iff \cancel{(1-k)}(1+k) = 4\pi^2(1-k)^{\cancel{2}} \iff 1+k = 4\pi^2 - 4\pi^2 k$$

$$\iff k(4\pi^2+1) = 4\pi^2 - 1$$

$$\therefore k = \frac{4\pi^2-1}{4\pi^2+1}$$