Envariabelsanalys Z & TD, ht2017. Räkneövning 6.1

9.3.5 Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$ konv. eller div.?

Lösn.: Vi jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right|$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|}{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 1 < \infty \qquad (*)$$

$$(*) \ \& \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \overset{\text{Koro.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \text{ konv.}$$

9.3.22 Är serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}\cdot 2^n}{\sqrt{n!}}$ konv. eller div.?

Lösn.: Vi använder kvotkriteriet

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \Big/ \frac{n^{100}\cdot 2^n}{\sqrt{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}\cdot \cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{\sqrt{n!}}}{\sqrt{n+1}\cdot\cancel{\sqrt{n!}}\cdot n^{100}\cdot\cancel{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{100}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}\cdot 2}{\cancel{n^{100}}\cdot n^{1/2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}\cdot 2^n}{\sqrt{n!}} \text{ konv.}$$

9.3.24 Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$ konv. eller div.?

Lösn.: Vi använder kvotkriteriet

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(n+1)!}{(2+n)!} \Big/ \frac{1+n!}{(1+n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+(n+1)n!)\cancel{(1+n)!}}{(2+n)\cancel{(1+n)!}\,(1+n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n! + n! + 1}{n\cdot n! + 2n! + n + 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n\cdot n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\cdot n!}\right)}{\cancel{n\cdot n!}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n!}+\frac{2}{n\cdot n!}\right)} = 1$$

$\Rightarrow$ Ingen slutsats kan dras! ... hmm...

Borde vara divergent då $\frac{1+n!}{(1+n)!} > \frac{n!}{(1+n)!} = \frac{1}{1+n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} \leftarrow \text{jämför med } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 > 0$$

$$L > 0 \ \& \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!} \text{ divergent}$$

9.4.10 Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ abs.konv., betingat konv. eller divergent?

<u>Lösn.</u>: $\cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} \right| =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{100\cdot(-1)^n}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3} = \infty \text{ Jämför med } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} \text{ ej abs. konv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cdot(-1)^n}{2n+3} \Rightarrow a_n = \frac{100\cdot(-1)^n}{2n+3}$$

(i) $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $|a_{n+1}| = \frac{100}{2(n+1)+3} = \frac{100}{2n+3+2} < \frac{100}{2n+3} = |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100\cdot(-1)^n}{2n+3} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3} \quad \text{betingat konv.}$$

9.4.22 För vilka värden på x är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$$

abs. konv., betingat konv., divergent ?

<u>Lösn.</u>: Vi kollar abs.-konv. med kvotkriteriet

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(4x+1)^{n+1}}{(n+1)^3}\right| \Big/ \left|\frac{(4x+1)^n}{n^3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(4x+1)\cancel{(4x+1)^n}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot \cancel{(4x+1)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4x+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\right| = |4x+1|$$

Kvotkriteriet: Abs. konv. om $|4x+1| < 1 \Leftrightarrow 4|x+\frac{1}{4}| < 1$

$$\Leftrightarrow |x-(-\tfrac{1}{4})| < \tfrac{1}{4} \Rightarrow \left\{ \underset{-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{4}\quad 0}{\longleftrightarrow} \right\} \Rightarrow x \in (-\tfrac{1}{2}, 0)$$

<u>$x > 0$</u>: $\dfrac{(4x+1)^n}{n^3} > 0 \overset{\text{Kvot-}}{\underset{\text{krit.}}{\Longrightarrow}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ divergent

<u>$x < -\frac{1}{2}$</u>: $\dfrac{(4x+1)^n}{n^3} = \dfrac{C^n}{n^3}$ där $C < -1$

Om t.ex. $C = -2$ så $\dfrac{C^n}{n^3} = \dfrac{(-1)^n 2^n}{n^3}$ ← växer snabbare än n^3

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3} \text{ div. då } x < -\frac{1}{2}$$

<u>$x = 0$</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ abs. konv.

<u>$x = -1/2$</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ abs. konv.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ abs. konv. då $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$. div. då $x > 0$ och $x < -1/2$