Envariabelsanalys Z & TD, ht 2017, Räkneövning 6.2

9.5.5 Bestäm centrum, konv. radie och konv. intervall för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$$

Lösn.: $\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \cdot 2^n \left(x-\frac{3}{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ Centrum $= \frac{3}{2}$, $a_n = n^3 \cdot 2^n$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 2^{n+1}}{n^3 \cdot 2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \cancel{2^n}\, \cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n^3}} = 2$$

$\Rightarrow$ Konv. radie $= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3$ div.

$x = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^3(4-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3$ div.

$\Rightarrow$ Konv. intervall $= (1, 2)$

9.5.16 Utveckla $\frac{1}{x}$ i en potensserie med centrum i $x = 1$ genom att utgå från

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad -1 < x < 1 \qquad (*)$$

Vad är konv. intervallet?

Lösn.: Låt $x = -t$ i $(*)$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \qquad -1 < t < 1 \qquad (**)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \{ t = x - 1 \text{ i } (**) \} =$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots$$

$$-1 < t < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots \qquad 0 < x < 2$$

9.5.27 Beräkna summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Lösn.: Vet att: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$

Derivera båda sidor m.a.p. x:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Låt $x = 1/3$: $\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff$

$$\iff \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \iff$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{9}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

9.6.12 Beräkna Maclaurinserien för $\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}$.

Var är serien giltig?

<u>Lösn.</u>: Vet att: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots$

$$\Rightarrow e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{2^2 x^4}{2} + \frac{2^3 \cdot x^6}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\left(e^{2x^2} - 1\right) = 2 + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 \cdot x^4}{3!} + \frac{2^4 \cdot x^6}{4!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{2n-2} \quad . \quad \text{giltig } \forall x \neq 0$$

9.6.20 Beräkna Taylorserien för $f(x) = e^{2x+3}$

kring $x = -1$.

<u>Lösn.</u>: Vet att: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (*)$

$$f(x) = e^3 \cdot e^{2x} = e^3 \cdot e^{2(x+1-1)} = e^3 \cdot e^{2(x+1)} \cdot e^{-2} =$$

$$= e \cdot e^{2(x+1)} = \{ t = 2(x+1) \text{ i } (*) \} =$$

$$= e \cdot \left(1 + 2(x+1) + \frac{2^2 (x+1)^2}{2} + \frac{2^3 (x+1)^3}{3!} + \dots \right) =$$

$$= e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 2^n}{n!} (x+1)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$