Matematisk analys i en variabel

SATSER OCH BEVIS

Tmv 138/181 2017

CHALMERS |

INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESSATS

SATS:

Om f kontinuerlig på [a,b], så ∃ ξ ∈ [a,b] s.a.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

BEVIS:

Låt m= min f(x), x∈[a,b] och

M=max f(x), x∈[a,b]

så $m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b m\, dx \;\leq\; \int_a^b f(x)dx \;\leq \int_a^b M\, dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{=C} \leq M$

$$\left.\frac{m \leq C \leq \mathrm{M}}{f\ kontinuerlig}\right\} \Rightarrow \{satsen\ om\ mellanliggande\ värden\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\xi \in [\mathrm{a,b}] \mathrm{s.a.}\, f(\xi) = C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore\ \exists\xi \in [\mathrm{a,b}] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

■

ANALYSENS FUNDAMENTALSATS

SATS:

Antag att f är kontinuerlig på [a,b] och låt

$$s(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \quad x \in [a,b]$$

Då är s(x) deriverbar och $s'(x) = f(x), \;\; \forall x \in (a,b)$

BEVIS:

Vi studerar differenskvoten

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt =$$

$$= \{integralkalkylens\ medelvärdessats\} = \frac{1}{h} f(\xi)(x+h-x) = f(\xi) \quad där\ x \le \xi_h \le x+h$$

ser att $\xi_h \to x\ då\ h \to 0$

f kontinuerlig så $\xi_h \to x$ medför $f(\xi_h) \to f(x)$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} = f(x)$$

■

INSÄTTNINGSFORMELN

SATS:

Om f kontinuerligt på [a,b] och F primitiv funktion till f så

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

BEVIS:

Vet att F primitiv till f men analysens fundamentalsats $\Rightarrow S(x) = \int_a^x f(t)dt$ också primitiv till f

$\Rightarrow F'(x) = S'(x)$ då $x \in [a,b] \Rightarrow \{korollarium\ till\ Lagranges\ medelvärdessats\} \Rightarrow$

$F(x) = S(x) + \mathrm{C},\ \forall\, x \in [a,b]$

$$x = a:\ \ F(a) = \int_a^a f(t) + \mathrm{C} \Rightarrow \left\{\int_a^a f(t)dt = 0\right\} \Rightarrow \mathrm{C} = F(a)$$

$$x = b:\ \ \int_a^b f(x)dx = S(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

■

VARIABELSUBSTITUTION

SATS:

Om x= g(t) där g är injektiv och deriverbar, så

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)dt \quad \text{där}_{b=g(\beta)}^{a=g(\alpha)}$$

BEVIS:

Antag F primitiv till f dvs. $F' = f$. Då gäller att:

$$\frac{d}{dx}F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F\big(g(t)\big)dt = \big[F\big(g(t)\big)\big]_\alpha^\beta = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

■

PARTIELL INTEGRATION

SATS:

Om F är en primitiv till f och g är deriverbar, så gäller att:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)g(x) = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

BEVIS:

Om F primitiv till f, så $F' = f$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\big(F(x)g(x)\big) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Integrera båda sidor:

$$\int \frac{d}{dx}\big(F(x)g(x)\big)dx = \int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

■

INTEGRALKRITERIET FÖR SERIER

SATS:

Antag att f är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$. Då är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$$

konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)dx$ är konvergent.

BEVIS:

Delar vi in intervallet [1,n] i n delar av längd 1 och approximerar integralen $\int_1^n f(x)dx$ med rektanglar, får vi å ena sidan att

$$f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \cdots + f(n) \cdot 1 = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \{summan\ area\ rektanglar\ under\ grafen\} \leq$$

$$\leq \int_1^n f(x)dx$$

och å andra sidan att

$$\int_1^n f(x)dx \leq f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \cdots + f(n-1) \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

dvs sammantaget:

$$\int_1^n f(x)dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_n^n f(x)dx + f(1)$$

låter vi $n \to \infty$ ser vi alltså att:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$$

är konvergent, om och endast om, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ är konvergent.

$\blacksquare$

KVOTKRITERIET FÖR SERIER

SATS:

Antag att $a_n > 0$ för stora n och låt $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Då gäller att:

a. $$Om\ 0 \leq \rho < 1\ så\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ konvergent$$

b. $$Om\ 1 < \rho \leq \infty\ så\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, dvs \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ divergent$$

c. *Om* $\rho = 1$ *så kan ingen slutsats dras*

BEVIS:

a. Om $0 \leq \rho < 1$ så $\exists r \in \mathbb{R}$ s.a. $\rho < r < 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ då n stort, dvs $\forall n \geq N$ för något stort $N \in \mathbb{N}$

Detta ger:

$a_{N+1} \leq ra_N$

$a_{N+2} \leq ra_{N+1} \leq r^2 a_N$

$a_{N+3} \leq ra_{N+2} \leq r^3 a_N$

$a_{N+k} \leq \cdots \leq r^k a_N$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} a_n}_{= C < \infty} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq C + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\, a_N < \infty \qquad då\ r < 1$$

b. om $\rho > 1$ så $\exists r \in \mathbb{R}$ s.a $1 < r < \rho$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$ då n stort

På samma sätt som i a. följer att $a_{N+k} \geq r^k a_N$

$$\Rightarrow \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a}_n = \lim_{k\to\infty} a_{N+k} \geq \lim_{k\to\infty} r^k a_N = \infty$$

c. vet att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar.

För båda dessa gäller att: $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

■