

TMV138/181 Envariabelsanalys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. (a) Lös differentialekvationen (3 p)

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = x.$$

- (b) Lös begynnelsevärdesproblemet (3 p)

$$\begin{cases} (1 + x^2)^2 y'(x) = -x\sqrt{1 + x^2}(1 + y(x)^2), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\frac{\sin(2x)}{1 + \sin(x) + \cos^2(x)}$ (3 p)

(b) $\ln(x^2 + x + 1)$ (5 p)

3. Beräkna följande gränsvärden om de existerar

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)e^{\frac{x^2}{2}} - 1}{x^2 \arctan(x^2)}$ (3 p)

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ (3 p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (6 p)

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sin^2(x), \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

5. (a) Kurvan $y = \frac{1}{1+x^4}$ och linjen $y = \frac{1}{4}$ avgränsar tillsammans ett begränsat område i första kvadranten. Området roterar runt y -axeln så att en kropp uppstår. Beräkna kroppens volym. (3 p)

(b) Beräkna längden av grafen till $f(x) = e^x$ då $\ln(3)/2 \leq x \leq \ln(8)/2$. (4 p)

Var god vänd!

6. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar. Dock inte mindre än 0 poäng totalt. (6 p)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{3n + 2n^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(n^2)}}{n!}$

7. Formulera och bevisa kvotkriteriet för serier. (6 p)

8. Visa att (5 p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k^2} \leq 3 \ln(2) - 1.$$

(Ledning: Beviset av integralkriteriet är bra att känna till.)

Lycka till!
/Hossein