Analys i en variabel, TMV138/181
Hösten 2018

Några svar, tips eller lösningar till
Exempel på tentamensuppgifter från avsnittet om integraler

1. Svar: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

2. Svar: -76

3. Beräkna $\int_0^2 4 - x^2\, dx + \int_2^3 x^2 - 4\, dx$

4. Svar: 2π

5. Svar: $\ln 2$

6. Svar: $\frac{\sin 1}{3}$

7. Svar: $C - \cos(\ln x)$

8. Svar: $\frac{2\pi}{3}$

9. Svar: $\frac{4}{3\ln 3} - \frac{1}{2\ln 2}$

10. Beräkna $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \pi x - 4x^2 + 1\, dx$

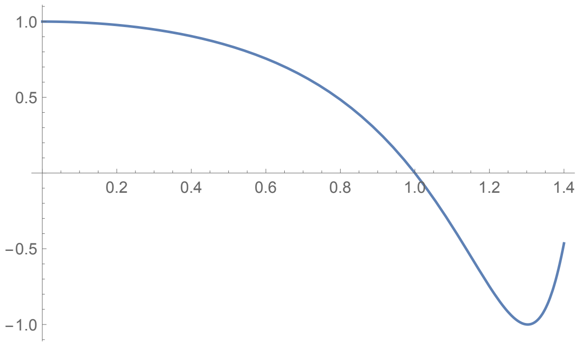
11. Om snitten är ***rätvinkliga*** trianglar är det inte självklart var den räta vinkeln ligger. Om vi i stället tänker oss ***liksidiga*** trianglar blir volymen $= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 (1-y)^2 dy$

12. Välj a och b så att integranden blir = 0. Vi förutsätter att a<b.

13. Använd att $e^{-x^2} \geq e^{-x}$ på det givna intervallet.

14. Variabelbytet $\ln x = t$ ger $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^p}$

15. Eftersom $f'(x) = \cos\frac{\pi x}{3-x^2}$ kan vi söka största och minsta värde genom att betrakta lösningar till $f'(x) = 0$ och värdet av f i intervallets ändpunkter. Men det är enklare att rita integranden, $y = \cos\frac{\pi t}{3-t^2}$, och tolka integralen som en area.



Största värde antas uppenbarligen i $x = 1$ (Notera att $f'(1) = 0$). Minsta värde antas i antingen $x = 0$ eller $x = 4/3$. Det förra verkar troligare men det är inget vi enkelt kan bevisa.

16.

17. Antag motsatsen, att $p \neq 0$ på intervallet. Då gäller antingen $p > 0$ vilket medför att $\int_0^1 p(x)dx > 0$, eller $p < 0$, vilket medför att $\int_0^1 p(x)dx < 0$.
Men $\int_0^1 p(x)dx = \left[ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$

18. Använd att $\int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}dt = h \cdot \sqrt{1 + \theta^3}$ där $2 < \theta < 2 + h$ så att $\theta \to 2$ när $h \to 0$