

Linjär Algebra Z1 (tmv 140)
Övningstenta 2

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) ett blad.

(a) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Bestäm motsvarande egenvärde. (2p)

(b) Diagonalisera den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ då A är matrisen ovan. (2p)

(c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (2p)

(d) Beräkna B^{-1} då $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2p)

(e) Lös ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ då $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
och matlabkommandot (2p)

`>> G = rref(C)`

ger resultatet $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) Bestäm en bas för $\text{Col}(C)$ då C är matrisen ovan. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt A vara matrisen $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$ där $\mathbf{a}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$,
 $\mathbf{a}_2 = [1 \ 3 \ -1 \ 3 \ -1]^T$, $\mathbf{a}_3 = [2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 1]^T$ och $\mathbf{a}_4 = [2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2]^T$.
Bestäm $(\text{Col}(A))^\perp$. (6p)

3. (a) Bestäm en ON-bas för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ då $\mathbf{v}_1^T = [1 \ 2 \ 2 \ 0]$,
 $\mathbf{v}_2^T = [3 \ 2 \ 1 \ 2]$ och $\mathbf{v}_3 = [1 \ -2 \ 0 \ 2]$. (4p)

(b) Bestäm projektionen av vektorn \mathbf{u} på W då $\mathbf{u}^T = [1 \ 8 \ -4 \ 6]$. (3p)

Var god vänd!

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & p & -1 \\ 3 & p & 7 & -1 \\ p & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(a) För vilka värden på p har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar? (4p)

(b) Lös ekvationssystemet för det tal p då ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har tvåparametrisk lösning (dvs två fria variabler). (4p)

5. Låt A vara en 4×5 -matris, B en 4×2 -matris med kolonnerna \mathbf{b}_1 och \mathbf{b}_2 . (4p)

Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lös matrisekvationen $AX = B$ då man vet att:

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, A\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1 \text{ och } A\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2$$

samt att $\text{Rank}(A) = \text{Rank}([A \ B]) = 3$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är radekvivalenta $m \times n$ -matriser och $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ så är också $\text{Col}(B) = \mathbb{R}^m$.

(b) Om $AB = I$, där I är en enhetsmatris (identity matrix), så är A inverterbar.

(c) Om A är en $n \times n$ -matris och $A^2 = I$ så är $\det(A) = 1$

(d) Om A är en $m \times n$ -matris och $\text{Rank}(A) = m$ så är den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ injektiv (one-to-one).

(e) Om A är en $n \times n$ -matris och $\text{Rank}(A) = n$ så är 0 inte egenvärde till A .

(f) Om A är en $n \times n$ -matris så finns det en ortogonal matris P så att $P^T A P$ är en diagonalmatris.

7. Till denna uppgift skall du ge fullständigt svar. Argumentera så väl du kan för alla slutsatser och påståenden.

(a) Vad menas med en *linjär avbildning* från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m ? (2p)

(b) Bevisa att om T är en *linjär avbildning* från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m så finns en matris A så att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla \mathbf{x} i \mathbb{R}^n . (3p)

(c) Antag att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla \mathbf{x} i \mathbb{R}^n och att $A = PDP^T$ där $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ är en ortogonal matris och D är en diagonalmatris, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Vad är $T(\mathbf{v}_1)$? (2p)