Linjär algebra Z, vt 05
Vecko–PM läsvecka 5

Lay: 4.7 Basbyte i vektorrum,
5.1-5.4, 5.7 Egenvärden och egenvektorer

I avsnitt 4.4 infördes koordinatvektorn $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ för en vektor $\boldsymbol{x}$ relativt en bas $\mathcal{B}$. Målet i **4.7** är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två olika baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. **Sats 15** säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen P som konverterar $\mathcal{B}$-koordinater till $\mathcal{C}$-koordinater betecknas ${}_{\mathcal{C}}\overset{P}{\leftarrow}_{\mathcal{B}}$, logiskt då att pilen går från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$. Riktningen, från höger till vånster, motiveras om vi ser på upprepade koordinatbyten, först från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$ sedan från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$. Det sammansatta koordinatbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{D}$ ges av matrisprodukten $Q \cdot P = {}_{\mathcal{D}}\overset{Q}{\leftarrow}_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}\overset{P}{\leftarrow}_{\mathcal{B}}$.
En svårighet är att varje matris kan ha flera tolkningar. I avsnitt **5.4** införs begreppet avbildningsmatris för godtycklig linjär avbildning $V \to W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{x}$ i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\boldsymbol{x})$ i en bas för W, $A[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i ${}_{\mathcal{C}}\overset{P}{\leftarrow}_{\mathcal{B}}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.

Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i **5.1** är centrala, såväl i matematik som i många tillämningar. I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till en matris A. Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i **5.2**. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i **5.3**, diagonalisering av matriser och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla avbildningsmatriser för linjära avbildningar **5.4**, system av linjära differentialekvationer i **5.7** och kvadratiska former i kapitel 7.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
4.7	PP, 1, 3, 5, 7, 10	13, 17, 19	11, 15
5.1	PP, 1, 3, 5, 6, 7, 9	13, 15, 17, 19, 39	21, 25, 27, 29
5.2	PP, 1, 5, 9, 13	17, 18, 27, 30	20, 21, 24
5.3	PP, 1, 3, 5, 7	11, 15, 17, 33	21, 23, 27
5.4	PP, 1, 3, 5	6, 9, 11, 15, 31, 32	21
5.7	PP, 1, 3, 5, 6	7, 9, 11, 15, 17, 19	

MATLAB-övning på tisdag och onsdag
Denna labuppgift är obligatorisk. Den skall redovisas vid datorn i läsvecka 6 eller 7 tillsammans med den uppgift som delas ut vecka 6. Det som skall visas upp är de grafer som frågas i uppgiften samt vilka slumpvektorer **b** som du använt. Högst 2 personer får redovisa tillsammans. Obs: I läsvecka 5 tar vi ej upp redovisningar utan då ger vi bara handledning.

Laborationsuppgift 2.

Hilbertmatrisen av storlek $n \times n$ har elementen $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Den är ett exempel på en illakonditionerad matris. MATLAB har en funktion **hilb** som genererar denna matris.

Rita en graf som visar hur konditionstalet $\kappa(H)$ växer med n. Använd **cond** och **semilogy**.

Nu skall vi lösa ekvationssystemet $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för stigande n
Tag **b** som en slumptalsvektor (**randn** i MATLAB). Beräkna den approximativa lösningen $\bar{\mathbf{x}}$ med \ och jämför med den exakta lösningen $\mathbf{x} = H^{-1}\mathbf{b}$. Den exakta lösningen kan i det här fallet beräknas mycket noggrannt m.h.a. **invhilb**.

Rita i samma graf relativa felet $\dfrac{\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ (som funktion av n samt den skattning uppåt av relativa felet som störningssatsen (sid 52 rad 4 i stencilen) ger. Som $\delta\mathbf{b}$ får vi här ta maskinnogranheten, eps i MATLAB.