Linjär algebra Z, vt 05
Vecko–PM läsvecka 6

Lay:6.1-6.6 Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden

I kapitel **6.1** införs *skalärprodukt, dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonala komplementet till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett nytt begrepp jämfört med det vi studerade i inledande kursen. Tänk på att ett underrum kan vara t.ex ett plan genom origo. Ortogonala komplementet är i så fall den linje som går genom origo och är vinkelrät mot planet.

I avsnitt **6.2** är målet att definiera vad som menas med en ON-bas, en ortonormerad bas. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en sådan bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är $x_k = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_k$ Projektionsformeln som ger projektionen av en vektor på en annan ser likadan ut i $\mathbb{R}^n$ som den "gamla" från inledande kursen, motiveringen till formeln kan emellertid inte se likadan ut (vi har inga vinklar i $\mathbb{R}^n$). En vidareutveckling kommer i sats 8 och sats 10 i **6.3**. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.
I **6.4** ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W. Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en basvektor med en som är ortogonal mot de redan bestämda basvektorerna. Gram-Schmidt processen leder till den numeriskt intressanta QR-faktoriseringen av matriser.
I avsnitt **6.5** ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning.* I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning tll `Ax = b` av `x=A\b`.
Sats 13 ger metoden i en liten ask. Däremot har kanske inte sats 14 direkt räknemässigt bruk, det viktiga är att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.
I boken definieras *minstakvadrat-felet* som $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|$ då $\hat{\boldsymbol{x}}$ är minsta-kvadrat lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| / \sqrt{n}$ då n är antalet ekvationer i systemet. I **6.6** tillämpas metoden på t.ex anpassning av linje till mätpunkter. Minsta kvadrat-felet ökar då i allmänhet om man lägger till mätpunkter under det att kvadratiska medelfelet t.o.m. kan minska.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
6.1	PP, 1, 6, 8, 11	15, 17, 24, 34	19, 26, 29
6.2	PP, 3, 5	9, 17, 21	23, 27, 29
6.3	PP, 1, 3, 5	9 11, 15, 25	21, 23
6.4	PP, 1, 3, 5	9, 11, 13, 15, 24	17, 19, 23
6.5	PP, 1, 3, 5	7, 9, 11, 15	13, 17
6.6	PP, 1, 4	7, 10, 11	