MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2005-08-20 kl. 08.30–12.30

Tentamen

Linjär Algebra Z1 (TMV 140))

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Vektorerna (2p)
$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^t$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$
och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$ är givna i $\boldsymbol{R}^4$.
Vilken/vilka av vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ är ortogonal(a) mot $\boldsymbol{v}_4$?
Svar: $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ är ortogonala mot $\boldsymbol{v}_4$.

(b) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$? (3p)

Svar: 12

(c) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^t$ är egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Vad är motsvarande egenvärde? (2p)
Svar: -4

(d) Ange ekvationen på parameterform för den linje som går genom punkten [1,0,3] och är ortogonal mot planet $4x - y = 5$. (Koordinater i ON-bas.) (3p)
Svar: $(x, y, z) = (1, 0, 3) + t(4, -1, 0)$

(e) Två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är inmatade som kolonnmatriser a och b i MATLAB. Vilka av följande beräkningar ger skalärprodukten mellan de två vektorerna?

1. `>> x=a'*b`
2. `>> x=a*b'`
3. `>> x=a.*b`
4. `>> x=sum(a.*b)`
5. `>> x=0;for k=1:n; x=x+a(k)*b(k);end` (2p)

Svar: 1, 4 och 5.

(f) En linjär avbildning $\boldsymbol{F}$ från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^3$ avbildar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ på $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ på $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$. Angé avbildningsmatrisen för $\boldsymbol{F}$. (2p)

Svar: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Till uppgifter 2 – 5 skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$, där (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 12 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 9 & 15 & 11 \end{bmatrix}$

3. Bestäm, för varje värde på parametern α, rangen till matrisen (6p)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: Om $\alpha \neq 0$ och $\alpha \neq 1$ är rangen =4.

Om $\alpha = 0$ är rangen =2, om $\alpha = 1$ är rangen =3.

4. Ange vilken typ av kurva följande ekvation beskriver (6p)

$$3y^2 + 4xy = 4$$

Skissa också i grova drag kurvan (markera särskilt nya koordinataxlar).

Lösning:

Svar: Ekvationen beskriver en hyperbel med huvudaxlar (nya koordinataxlar) i riktningarna $x + 2y = 0$ och $2x - y = 0$.

5. Låt (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A ovan har egenvärdena -2 och 2. Bestäm en ON-bas av egenvektorer till A.

Lösning:

Svar: $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en ON-bas av egenvektorer till A

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   Låt A vara en 5×4-matris.

   (a) Om ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för något $\boldsymbol{b}$ så har det lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

   Svar: Falsk

   (b) Om $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entydig lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

   Svar: Falsk

   (c) Om $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ högst en lösning om $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

   Svar: Sann

   Låt A vara en $n \times n$-matris.

   (d) Om ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för något $\boldsymbol{b}$ så har det lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

   Svar: Falsk

   (e) Om $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entydig lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

   Svar: Sann

   (f) Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning för något $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ så har $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ parameterlösning.

   Svar: Sann

7. (a) Definiera vad som menas med att en mängd vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

   Svar: Se boken

   (b) Ett resultat i boken säger att om man har en mängd bestående av egenvektorer till en matris, vilka svarar mot olika egenvärden, så är mängden linjärt oberoende. Genomför beviset i specialfallet då antalet vektorer är tre. (5p)

   Svar: Se boken