**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

**Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Datum: 2007-01-17 kl. 08.30–12.30
Telefonvakter:Jonas Hartwig, Tommy Gustafsson
tel. 0762-721860/ 0762-721861

# Linjär Algebra E1 (TMV141)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 05/06 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1**. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på Span$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ då (2p)

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(c) Beräkna $F(\mathbf{v})$ för $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ då $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är den linjära avbildning som ges av (3p)

$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) Ange en bas för Nul$(A)$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange en bas för Col$(B)$ då $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ange dim(Nul$(B)$). (3p)

(f) Ange vilka av följande vektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$, som är egenvektorer till matrisen (2p)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Ange också motsvarande egenvärden.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

**2**. Bestäm $LU$-faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (5p)

**3**. (a) Visa att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (2p)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till ekvationssystemet ovan. (5p)

Var god vänd!

**4.** $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. I denna bas är $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avbildningsmatris för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (6p)

Bestäm $T(\mathbf{v})$ (i standardbas) då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$ (också i standardbas).

**5.** Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3. Låt $U_1$ vara det underrum av $\mathbb{P}_3$ vars element är alla polynom $p$ som uppfyller $p(-1) = p(1)$. Låt $U_2$ vara det underrum av $U_1$ vars element dessutom uppfyller $p(1) = 0$. (6p)

Bestäm först en bas för $U_2$, fyll ut den till en bas för $U_1$ och slutligen till en bas för hela $\mathbb{P}_3$.

**6.** Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) För alla matriser $A$ gäller att $A^T A$ är en symmetrisk matris.

(b) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är även $0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2$ lösning till detta ekvationssystem.

(c) Om kolonnvektorerna i matrisen $A$ är linjärt beroende, så kan inte ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha entydig lösning för någon vektor $\mathbf{b}$.

(d) Det finns en $4 \times 7$-matris $A$ sådan att $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$.

(e) Alla kvadratiska matriser kan diagonaliseras.

(f) Om matrisen $A$ har fler kolonner än rader, så är $\det(A^T A) = 0$.

**7.** (a) Definiera begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (1p)

(b) Visa med definitionens hjälp, att varje mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ som innehåller nollvektorn, är en *linjärt beroende mängd av vektorer.* (2p)

(c) Bevisa, att varje mängd bestående av fem vektorer i $\mathbb{R}^4$, är linjärt beroende. (3p)

Lycka till!
LF

## Kortfattade lösningar

**1**. (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

**2**.

**3**. (a)

(b)

**4**.

**5**.

**6**. (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

**7**. Se läroboken, avsnitt 1.7!