1) a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -9 \\ -6 & 9 & -19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 9 & -19 \end{vmatrix} = -5\cdot 19 - (-9\cdot 9) = \underline{\underline{-14}}$

(-1) $(+4)$

b) $P_u = \dfrac{u\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} v_1 + \dfrac{u\cdot v_2}{v_2\cdot v_2} v_2 = \dfrac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}5/4\\1/4\\3/4\\1/4\end{bmatrix}}}$

$(u = [1\ 1\ 1\ 0]^T)$

c) $F\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

linjäritet!

$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = F\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}F\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Trappstegsmatris! $AX = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = s + 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = -4t \\ x_4 = t \\ x_5 = t \end{cases}$ dvs $x = s\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\0\\-4\\1\\1\end{bmatrix}$

Bas för Nul(A): $\underline{\underline{\{[1\,1\,0\,0\,0]^T, [3\ 0\ -4\ 1\ 1]^T\}}}$

e) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivotkolonner: nr 1 och 3

Bas för Col(B) är då 1:a och 3:e kolonnen i B, dvs $\underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}}}$

$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \#\text{kolonner} - \dim(\mathrm{Col}(B)) = 5-2 = \underline{\underline{3}}$

f) Multiplicera respektive vektor med A:

$Av_1 = \begin{bmatrix}-3\\0\\3\\-3\end{bmatrix} = 3v_1 \quad Av_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\3\\-2\end{bmatrix} \neq \lambda v_2 \quad Av_3 = \begin{bmatrix}14\\14\\-14\\-28\end{bmatrix} = 14 v_3$

v_1 egenvektor till egenvärdet 3 v_3 egenvektor till egenvärdet 14

2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} = U$

-1, 0, 2 (multipler av elementet i rad 1)

-2, -1 (mult. av elementet i rad 2)

0 (multipel av elem. i rad 3)

Detta ger $L = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$

3) a) Vi försöker lösa $AX=b$ med eliminationsmetoden.

$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right]$

Vi ser av detta att systemet saknar lösning. pivotelement i HL!

b) MKM-lösning(en) är en lösning till systemet $A^TAX = A^Tb$

$[A^TA \mid A^Tb] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \times 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -7 \\ 6 & 2 & 12 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 9 & -7 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right]$ Entydig lösning: $\underline{\underline{x = \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}}}$

4) Om vektorn $x \in \mathbb{R}^3$ har koordinatvektorn $[x]_B$ i basen $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ så gäller $x = P[x]_B$ och $[x]_B = P^{-1}x$, där $P = [v_1\ v_2\ v_3]$

Den linjära avbildningen T har matrisen M i standardbas och M_B (given) i basen B. Då gäller:

$T(x) = P[T(x)]_B = PM_B[x]_B = \underbrace{PM_BP^{-1}}x$

4/ (forts) Vi behöver alltså P^{-1}!

$$[P\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 2&1&0&0&1&0\\ 3&0&2&0&0&1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 0&1&2&2&-1&0\\ 0&0&5&3&-3&1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5&5&5&5&0&0\\ 0&5&10&10&-5&0\\ 0&0&5&3&-3&1 \end{array}\right]$$

$$\sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5&0&0&-2&2&1\\ 0&5&0&4&1&-2\\ 0&0&5&3&-3&1 \end{array}\right] = [5I\,|\,5P^{-1}] \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2&2&1\\ 4&1&-2\\ 3&-3&1 \end{bmatrix}$$

Till sist: $T(x) = PM_BP^{-1}x = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1&1&1\\ 2&1&0\\ 3&0&2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2&2&0\\ 2&2&-2\\ 0&-2&2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2&2&1\\ 4&1&-2\\ 3&-3&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0\\ -8\\ 6 \end{bmatrix}}}$

5/ $P_3 = \{$alla polynom av grad $\leq 3\}$

$U_1 = \{p \in P_3 : p(1) = p(-1)\}$

$U_2 = \{p \in U_1 : p(1) = 0\}$

$p \in U_2 \iff p(1) = p(-1) = 0 \iff p(x) = (x-1)(x+1)q(x),\ q \in P_1$

Varje polynom i U_2 kan alltså skrivas: $p(x) = (x^2-1)(ax+b) = a(x^3-x) + b(x^2-1)$
(och inga andra)

En bas för U_2 är därmed $\{x^3-x,\ x^2-1\}$ (de är linjärt oberoende och spänner upp U_2)

Om $p \in U_1$, så gäller att $p(x) - p(1) \in U_2$

Varje $p \in U_1$ kan alltså skrivas $p(x) = a(x^3-x) + b(x^2-1) + \underbrace{p(1)}_{=c}$,

dvs som en linjärkombination av $\{x^3-x,\ x^2-1,\ 1\}$ som är linjärt oberoende

Därmed är en bas för U_1: $\{x^3-x,\ x^2-1,\ 1\}$

För att fylla ut till en bas för hela P_3 räcker det att hitta ett polynom i P_3 som inte ligger i U_1, t.ex. x (olika värden i 1 och -1)

Eftersom $\dim P_3 = 4$ måste

$\{x^3-x,\ x^2-1,\ x,\ 1\}$ vara en bas för P_3.

6/ a) M symmetrisk betyder: $M^T = M$

Vi testar: $(A^TA)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^TA$ **Sant!**

b/ x_1, x_2 lösningar till $Ax = b \implies$

$A(0{,}2x_1 + 0{,}8x_2) = 0{,}2\,Ax_1 + 0{,}8\,Ax_2 = 0{,}2b + 0{,}8b = b$

dvs $0{,}2x_1 + 0{,}8x_2$ är lösning till $Ax = b$ **Sant**

c/ I lösningarna till $Ax = 0$ är antalet fria variabler lika med antalet kolonner minus $\dim \mathrm{Col}(A)$, vilket är minst 1 då kolonnerna i A är linjärt beroende. (dim $\mathrm{Col}(A)$ < antalet kolonner)

$Ax = b$ kan därmed ha oändligt många lösningar eller ingen lösning, aldrig entydig lösning. **Sant**

d/ Finns en matris A med 7 kolonner och $\dim \mathrm{Nul}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)$?

Rank Theorem: (dimensionssatsen) $\dim \mathrm{Nul}(A) + \underbrace{\dim \mathrm{Col}(A)}_{=\mathrm{rank}(A)} = 7$ (udda!)

Därmed kan dimensionerna aldrig vara lika! **Falskt**

e/ $\underset{n\times n}{A}$ diagonaliserbar $\iff$ det finns en egenbas för $\mathbb{R}^n$

Ta $A = \begin{pmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{pmatrix}$ Enda egenvärde $\lambda = 1$, egenvektorer $t\begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$

Egenrummet har dimension 1, ingen egenbas.
A är ej diagonaliserbar. **Falskt**

f/ Om A är en $m \times n$-matris med $m < n$, bygg ut A till en $n \times n$-matris $B = \begin{bmatrix} A\\ 0 \end{bmatrix}$, $\det B = 0$ ($\det A$ finns ej!)

Då är $A^TA = B^TB$ och $\det(A^TA) = \det(B^TB) = (\det B)^2 = 0$