

Lösningförslag: Linjär Algebra E/M/Td/V/Z

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange värdet av
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$
 (2p)

Svar: 30

- (b) Ange en trappmatris som är radekvivalent med totalmatrisen för ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Svar:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{array} \right]$$

- (c) Ange den symmetriska koefficientmatrisen till den kvadratiska formen (1p)
 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$

Svar:
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- (d) Ange egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$ (3p)

Svar: Egenvärden 4 och 2. Egenvektorer till egenvärdet 4 är $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$

Egenvektorer till egenvärdet 2 är $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$

- (e) Ange bas för nollrum till $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ (2p)

Svar: $\{ [-1 \ 2 \ 1 \ 0]^T, [0 \ -1 \ 0 \ 1]^T \}$

- (f) Låt P vara en ortogonal matris. (3p)

Ange $P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ då $P \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (två möjligheter).

Svar:
$$\begin{bmatrix} \pm \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm LU-faktoriseringen av $A.$ (3p)

Svar:
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Låt

(7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en bas för $\text{Col}(A)$.

Lösning och svar: Pivotkolumnerna nr. 1, 2 och 4.

Alltså är $\{[1 \ 1 \ -1 \ 1]^T, [2 \ 0 \ -1 \ 1]^T, [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T\}$ en bas för $\text{Col}(A)$.

(b) Bestäm en ON-bas för $\text{Col}(A)$.

Lösning och svar: Gram-Schmidt processen och normering ger ON-basen:

$$\left\{ \left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right]^T, \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ 0 \right]^T, \left[0 \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T \right\}$$

4. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en andragradskurva $y = a + b \cdot t + c \cdot t^2$ (6p) till följande data

$$\begin{array}{c|cccccc} t & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 5 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

Rita en beskrivande figur.

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata (mätpunkter), så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

Lösning och svar: Konstanterna a , b , c skall uppfylla:

$$\begin{cases} a - 2b + 4c = 5 \\ a - 1b + 1c = 0 \\ a + 0b + 0c = 0 \\ a + 1b + 1c = -2 \\ a + 2b + 4c = 1 \end{cases}$$

Detta system saknar lösning. Minsta-kvadratmetodens lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösning till $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

$$\text{Då } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ är}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \text{ och } A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Lösningen till $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ är $a = -\frac{6}{5}$, $b = -1$, $c = 1$.

Projektionen av \mathbf{b} på $\text{Col}(A)$ är

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Felvektorn är } \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \|/\sqrt{5} = \frac{\sqrt{14}}{5}$

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av att $T(\mathbf{x})$ är speglingen av \mathbf{x} i planet $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. (6p)

- (a) Bestäm en bas \mathcal{B} för \mathbb{R}^3 i vilken matrisen för T är en diagonalmatris. Ange denna diagonalmatris D och bestäm $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}$ då $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1, 2, 3]^T$.

Svar: Varje bas för \mathbb{R}^3 , som består av två vektorer i planet och den tredje ortogonal mot planet, duger. Till exempel kan $\mathcal{B} = \{[2, 1, 0]^T, [-1, 0, 1]^T, [1, -2, 1]^T\}$ väljas.

Matrisen för T är då $D = \text{diag}(1, 1, -1)$ och $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(1, 1, -1)[1, 2, 3]^T = [1, 2, -3]^T$.

Med annan ordning på vektorerna i basen kan minustecknet flyttas.

- (b) Ange basbytesmatrisen P för koordinatbyte mellan standardbas och basen \mathcal{B} . Bestäm \mathbf{x} och $T(\mathbf{x})$ då $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1, 2, 3]^T$.

Svar: Kolonnerna i P är basvektorerna ovan. Här är $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [3, -5, 5]^T$ och $T(\mathbf{x}) = P[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [-3, 7, -1]^T$.

- (c) Vilket samband råder mellan standardmatrisen M för T och matriserna P och D ovan.

Svar: $M = PDP^{-1}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- (a) För alla kvadratiska matriser A , B och C , gäller att om $A \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

Svar: Falskt

- (b) För alla kvadratiska matriser A , B och C , gäller att om $\det(A) \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

Svar: Sant

- (c) Om $\text{Rank}[A|\mathbf{b}] = \text{Rank}(A)$ så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.

Svar: Sant

- (d) Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt.

Svar: Falskt

- (e) Om A är en symmetrisk matris och $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt. Sant

Svar: Sant

- (f) Det finns en 6×3 -matris, A , sådan att $(\text{Col } A)^\perp$ har dimension 2.

Svar: Falskt

7. Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd av nollskilda vektorer i \mathbb{R}^n . (6p)

Bevisa att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende.

Svar: Se boken, 6.2 sats 4.