Linjär algebra Z, vt 06
Vecko–PM läsvecka 4

Lay: 4.1 - 4.6 Vektorrum

I avsnitt **4.1** introduceras begreppen *vektorrum* och *underrum*. Detta kan synas abstrakt men idén är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper. Du har redan mött två olika vektorrum, även om vi inte direkt poängterat att de är olika. Först studerade vi det åskådliga rummet med vektorer som representeras av riktade sträckor. En vektor är då en mängd av riktade sträckor, alla representanter för vektorn. I denna kurs har vi arbetat med $\mathbb{R}^n$ där en vektor är en n-tipel av reella tal. Vi kan åskådliggöra vektorer i $\mathbb{R}^3$ genom att markera punkter i ett rätvinkligt koordinatsystem.
På samma sätt kan vi, så snart vi har en bas för det åskådliga rummet bestående av tre vektorer som inte ligger i ett plan, ge koordinater för vektorerna. Vi får då objekt i $\mathbb{R}^3$. Om basen är en standardbas (ON, positivt orienterad) ser vi ingen skillnad på åskådliga rummet och $\mathbb{R}^3$. Är basen inte en standardbas så är det annorlunda. Detta är naturligtvis inte det enda skälet till att studera vektorrum allmänt, det finns många. Ett annat är att först genom att gå till den allmänna teorin kan vi hantera begreppen *underrum* och *dimension* bra. Dessa är väsentliga då vi fortsätter vår analys av linjära ekvationssystem.

Viktigast i **4.1** är sats 1 med vars hjälp man oftast enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum. Bevisidén som ges i exempel 10 är värdefull kunskap.

I **4.2** införs begreppen *nollrum* till en matris A, som är samma som lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, och *kolonnrummet* till A, som är samma som mängden av alla $\boldsymbol{b}$ för vilka ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning. Dessa underrum i $\mathbb{R}^n$ kallas också*kärna* och *värdemängd* för den linjära avbildning som ges av A. Vi får alltså nya sätt att tänka om, och analysera, linjära ekvationssystem. Beviset av sats 2 är centralt då det visar hur matrismultiplikationens linjära egenskaper spelar in. Exempel 8 och 9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs, även för vissa differentialekvationer ges ju allmän lösning av en partikulärlösning och allmän homogenlösning.

Bas-begreppet, som införs i **4.3** är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Väsentligt att kunna är att bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 6 med bevis är viktig.

I många tillämpningar handlar det om att välja en bas som är lämplig för det aktuella problemet. Koordinatsystem, som införs i **4.4**, är avgörande i detta sammanhang. Det gäller också att hålla ordning på de olika system man arbetar med. För detta har man *basbytesmatrisen* $P_{\mathcal{B}}$ som kommer till stor användning längre fram i kursen. Ett djupare studium görs i 4.7

Begreppen *dimension* och *rang* (dimensionen av kolonnrummet) införs i **4.5** och **4.6**. Matrisrang är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. I **4.5** ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension, Sats 11 som visar att om H är äkta underrum i V så har H lägre dimension än V och sats 12, *bassatsen*, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas.
Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.I **4.5** är sats 14, *rangsatsen* eller som den också kalla *dimensionssatsen* viktig. Självklart också fortsättningen av sats 2.3.8 om inverterbara matriser. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4 .

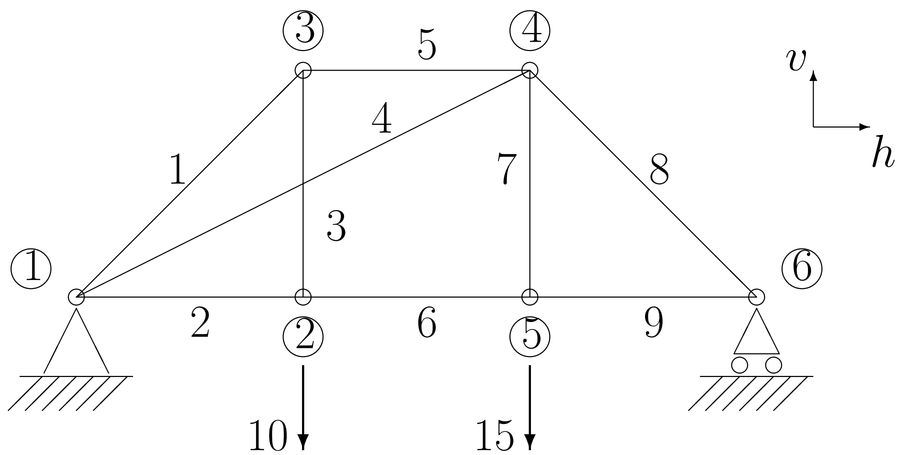
Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
4.1	PP 1, 3, 4, 7	11, 13, 15, 19, 35, 36	20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 31, 37	25, 27, 30, 33, 39
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 27, 37, 38	21, 23, 29, 30, 36
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11, 13, 27, 29, 33	15, 19, 23, 25
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	21, 33	19, 27, 29, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	35	7, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 30

Laborationsuppgift 2.

Krafterna i de olika grenarna av fackverket i figuren skall bestämmas då angivna yttre krafter är anbringade.



Genom att ansätta kraftjämvikt i horisontal- och vertikalled i knutpunkterna får vi ett linjärt ekvationssystem för de sökta krafterna i fackverkets grenar. Att detta blir välbestämt för aktuellt fackverk följer av resultat i mekaniken.

Skriv upp det linjära ekvationssystemet och bestäm krafterna i de olika grenarna av fackverket genom att lösa ekvationssystemet med MATLAB. Använd **sparse** och betrakta gleshetsstrukturen med **spy**.
Redovisning: Arbeta i grupper om två. Visa upp era resultat i en form som är lättredovisad (script!).