MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-08-25 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakter: Peter Lindroth
tel. 0762-721860
Peter Hegarty
tel. 0733-428321

Linjär Algebra E (tmv141)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 27/8. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange ett tal h sådan att vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & h \end{bmatrix}^T$ är en linjärkombination av vektorererna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ där (3p)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(c) Låt A vara standardmatrisen för spegling i ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. Ange A^2. (2p)

(d) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med matrisen (2p)
$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ange baser till både rad och kolonnrummet för A.

(e) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ i denna bas. (3p)

(f) Låt A vara en matris vars nollrum spänns upp av vektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och för vilken vektorn $w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor med egenvärdet 2. Ange en matrisekvation med vars hjälp A kan bestämmas. Du behöver **inte** beräkna A. (3p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (6p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Bestäm i så fall en sådan.

Var god vänd!

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -2 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en bas i M.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ på M.

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

5. Ange den linje som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna (4p)

$$(1,2), \quad (2,4), \quad (3,5), \quad (4,7).$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A är en $17 \times n$ matris av rang 16 så måste n vara minst 16.

(b) För alla 6×7 matriser gäller att

$$\dim[\mathrm{Nul}A] + \dim[\mathrm{Col}A] = 6.$$

(c) Varje 5-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^7$ har en ON-bas.

(d) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så kan inte A vara inverterbar.

(e) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så måste A vara inverterbar.

(f) Om A är inverterbar så måste A^{2007} också vara det.

7. (a) Definiera begreppen *inverterbar* och *symmetrisk* matris. (2p)

(b) Bevisa att för varje inverterbar matris A gäller $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. (2p)

(c) Låt A vara en inverterbar symmetrisk matris. Bevisa att matrisen A^{-1} är också symmetrisk. (2p)

Lösningar

1. (a) Utveckling efter rad 2 ger

$$(-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Därefter utveckling efter tredje kolumnen:

$$= (-3) \times -(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \times (1 \times 1 - 2 \times 3) = 15.$$

(b) Vi arbetar med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array}\right].$$

Efter följande sekvens av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array}\right].$$

Systemet är konsistent (och därmed är $\mathbf{v}$ en linjärkombination av $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$) om och endast om $h - 5 = 0$, dvs $h = 5$.

(c) A^2 är matrisen till den avbildning som består av en sammansättning av speglingen med sig själv. Men en sådan sammansättning är rent av identitetsavbildningen (oberoende av vilket plan vi speglar i) som tar varje punkt till sig själv. Därmed är

$$A^2 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) De nollskilda raderna i U utgör en bas till $\mathrm{Row}(A)$, dvs en bas till $\mathrm{Row}(A)$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Pivotelementen i U ligger i den första och tredje kolumnen. Motsvarande kolumnerna i A utgör en bas till $\mathrm{Col}(A)$, dvs en bas till $\mathrm{Col}(A)$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(e) Vi söker skalärer c_1, c_2 sådan att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}.$$

I matrisform blir denna ekvation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

En radoperation på totalmatrisen ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

varur vi får $c_1 = 7$, $c_2 = -3$.

(f) De givna uppgifterna kan sammanfattas i följande tre ekvationer :

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{w} = 2\mathbf{w}.$$

Ställer vi upp denna information i matrisform så erhålls matrisekvationen

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

med vars hjälp man kan bestämma A.

2. Kalla matrisen för M. Dess karakteristisk ekvation är $\det(M - \lambda I) = 0$. Vi utvecklar denna determinant genom rad- och kolonnoperationer samt utveckling efter kolonn:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = -(1-\lambda)^2(10-\lambda)$$

Därmed finns det två egenvärden, $\lambda_1 = 1$ (dubbelt) och $\lambda_2 = 10$. Nu söker vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 1$: Vi har

$$M - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande egenrum är nollrummet till den senaste matrisen. Lös ut detta! Vi får $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$\lambda_2 = 10$: Vi har

$$M - 10I = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lös ut nollrummet. Det spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. Notera att både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är redan ortogonala mot $\mathbf{v}_3$ som stämmer överens med faktumet att egenrummen för olika egenvärden hos en symmetrisk matris är alltid ortogonala (Lay, Sats 1, s.450). Dock är inte $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala mot varandrs, så vi först byter ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Nu utgör $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'$ och $\mathbf{v}_3$ en bas till $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till M. För att erhålla en ON-bas återstår att normera dem. Så vi tar

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

och då är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en ON egenbas.
Man kan alternativt ta en godtycklig egenvektor för $\lambda = 1$ och ta vektorprodukten av den med en egenvektor för $\lambda = 10$. Den nya vektorn blir ortogonal mot båda, och måste vara en egenvektor till det dubbla egenvärdet $\lambda = 1$. Normera sedan.

3. a) Vi låter A vara den matris vars kolonner är de givna vektorerna (vi kallar dem $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3$), och vi undersöker kolonnernas inbördes beroende genom radoperationer till en trappstegsmatris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta visar att $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ utgör en bas för M. $\mathbf{v}_3$ är en linjärkombination av dessa.

(b) Nu behöver vi en ortogonal bas till M. Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är inte ortogonala (deras skalärprodukt är 16). Så vi byter ut $\mathbf{v}_2$ mot en vektor ortogonal mot $\mathbf{v}_1$ (Gram-Schmidt):

$$\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{4}{9}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Vi tar $\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T$ (samma riktning, enklare siffror), $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2'$ är nu ortogonala. Projektionen av $\mathbf{v}$ på M ges då av

$$\mathbf{v}_M = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2'}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{8}{9}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{9}\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

4. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Då har systemet formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ Om vi antar att A är diagonaliserbar, dvs har en bas av egenvektorer $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ för egenvärdena $\lambda_1,\ \lambda_2$, så ges den allmänna lösningen av

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_1\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Så det gäller att bestämma λ_1, λ_2 och motsvarande egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen för A är

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0,$$

så vi har egenvärdena $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer hittas på sedvanligt sätt (se uppgift 2) och vi konstaterar att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer tillhörande λ_1 resp. λ_2. Allmänna lösningen är alltså

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{7t} + C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Insättning av villkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $C_1 = \frac{1}{3},\ C_1 = -\frac{1}{3}$. Lösningen är alltså

$$x_1(t) = e^{7t} - e^{-2t},$$
$$x_2(t) = \frac{2}{3}e^{7t} + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

5. Vi söker linjen $y = kx + m$ där $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ är minstakvadratlösningen till det ekvationssystem som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{p}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{p}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 53 \\ 18 \end{bmatrix},$$

och löser detta system. Vi får

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = \frac{8}{5}x + \frac{1}{2}$.

6. (a) Sant. Rangen är lika med dimensionen av kolonnrummet, som kan inte överstiga antalet kolonner.

(b) Falskt. Istället är summan av dessa dimensioner lika med antalet kolonner (=7): se Theorem 14, p.265.

(c) Sant. Varje underrum av $\mathbb{R}^n$ har en ON-bas (Gram-Schmidt).

(d) Falskt. En matris saknar invers om och endast om 0 är ett av dess egenvärden (Theorem, p.312).

(e) Sant. Samma motivering som under (d).

(f) Sant. Inversen till A^{2007} är den 2007:te potensen av inversen till A. Alternativt kan man konstatera t.ex. att $\det(A^{2007}) = (\det A)^{2007}$, som är skild från noll om och endast om $\det A \neq 0$.

7. (a) En $n \times n$-matris A sägs vara *inverterbar* (se s.119) om det finns en $n \times n$-matris B s.a. $AB = BA = I_n$. Man brukar skriva $B := A^{-1}$.

En $n \times n$ matris sägs vara *symmetrisk* (se s.449) om $A = A^T$ (där transponatmatrisen A^T erhålls genom att omvandla rader till kolumner).

(b) Vi utnyttjar faktumet (Theorem 3(d), p.115) att, för alla matriser X, Y sådan att produkten XY existerar, gäller att

$$(XY)^T = Y^T X^T. \tag{1}$$

Notera också att identitetsmatrisen I_n är symmetrisk. Därmed har vi att (om A är $n \times n$, säg)

$$I_n = I_n^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T,$$

och

$$I_n = I_n^T = (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T.$$

Enligt definitionen av matrisinvers i del (a), innebär de två relationerna ovan att $(A^{-1})^T$ är inversen till A^T, v.s.v.

(c) Om A är symmetrisk så är $A = A^T$. Därför gäller enligt (b) att

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

dvs $(A^{-1})^T = A^{-1}$, så A^{-1} är också symmetrisk.