MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-03-17 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakter:Elin Götmark, Jonatan Vasilis
tel. 0762-721860/0762-721861

Lösning till Linjär Algebra E1/M1/TD1/V1/Z1

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 19/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix}$. (2p)

Lösning:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix}.$$
Svar: $(a-1)(a-2)(a-3)$

(b) U är det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. (3p)
Avgör för vilket eller vilka värden på den reella konstanten a vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a-4 & 5-a & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör underrummet U.

Lösning: $\mathbf{w}$ tillhör underrummet U om och endast om vektorekvationen $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{w}$ har lösning.
Detta är ekvivalent med att totalmatrisen $\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{w} \end{array}\right]$ inte har pivotposition i femte kolonnen.
Elementära radoperationer leder till trappmatris med pivotposition i kolonn 1, 2 och 4 samt i kolonn 5 om $a \neq 6$.
Svar: $\mathbf{w}$ tillhör underrummet U om och endast om $a = 6$.

(c) Ange dessutom en bas för underrummet U ovan. (2p)

Lösning: En bas för U ges av pivotkolonnerna till matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}$.
Dessa framgår av kalkylerna i föregående uppgift.
Svar: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ är en bas för U.

(d) Ange avbildningsmatrisen (i standardbas) för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning: Avbildningsmatrisen till F i standardbas är
$A = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$.
$F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Svar: Avbildningsmatrisen till F är $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) Ange minstakvadratlösningen till ekvationsystemet (3p)

$$\begin{cases} x & & = & 0 \\ & y & = & 1 \\ x + & y & = & 10. \end{cases}$$

Lösning: Ekvationssystemet i matrisform är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Svar: $x = 3$, $y = 4$.

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning: För att erhålla LU-faktorisering skall A överföras till trappform enbart genom operationen: addera multipel av en rad till en annan. Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

De motsatta operationerna som leder från U till A ger elementen i L. Vi kan då skriva ner L direkt.

Svar: $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm en matris P som diagonaliserar matrisen $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (6p)

Ange också diagonalmatrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$.

Lösning: Kolonnerna i matrisen P är egenvektorer till M. Egenvärdena till M är diagonalelementen 2, 3, och 4, eftersom M är en triangulär matris. Motsvarande egenvektorer är lösningarna till ekvationssystemen $(M - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (för respektive λ).

I tur och ordning ger detta egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan då välja $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$, och diagonalmatrisen ges av egenvärdena i motsvarande ordning.

Svar: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definieras enligt (2p)

$$T(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t)$$

Visa att M är avbildningsmatrisen till T i standardbasen $\{1, t, t^2\}$. Bestäm en bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T.

Lösning: Transformationsmatrisens kolonner utgörs av koordinatvektorerna för bilderna av basvektorerna ($\mathcal{B}$ står för standardbasen):

$$\begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}} & [T(t)]_{\mathcal{B}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2]_{\mathcal{B}} & [1+3t]_{\mathcal{B}} & [2+2t+4t^2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = M.$$

En bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T representeras via koordinatavbildningen av en egenbas till matrisen M i uppgift (a). Om vi tar de egenvektorer $\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$ vi valde där, så ser vi:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1+t]_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [2+2t+t^2]_{\mathcal{B}}.$$

Svar: En bas är $\{1, \ 1+t, \ 2+2t+t^2\}$.

3. Låt U vara ett underrum i $\mathbb{R}^4$ som definieras genom

$$U = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

(a) Ange en matris A så att $U = \operatorname{Nul} A$. Bestäm en bas för U. (2p)

Lösning: Underrummet U ges av lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, vilket innebär att $U = \operatorname{Nul} A$.

Då $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ser vi att dessa lösningar kan skrivas:

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ vilket ger oss en bas för } U.$$

Svar: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. En bas för U är

$$\{\mathbf{a_1}, \ \mathbf{a_2}\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

(b) Bestäm en ON-bas för U. (2p)

Lösning: Vi ortogonaliserar enligt Gram-Schmidt.

Sätt $\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1}$ och ta $\mathbf{b_2} = \mathbf{a_2} - \frac{\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1}}\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Slutligen normerar vi basen.

Svar: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$.

(c) Skriv vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ med $\mathbf{w}_1 \in U$ och $\mathbf{w}_2 \in U^\perp$. Bestäm sedan avståndet från $\mathbf{w}$ till U. (2p)

Lösning: Vi har $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, där $\mathbf{w_1} = \mathrm{Proj}_U\,\mathbf{w}$ och $\mathbf{w_2} = \mathbf{w} - \mathbf{w_1}$. Med den ortogonala basen $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2\}$ i uppgift(b) får vi:

$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1}}\mathbf{b_1} + \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{b_2}}\mathbf{b_2} = \frac{1}{2}\mathbf{b_1} + \frac{1}{2}\mathbf{b_2}$,

och avståndet från $\mathbf{w}$ till U blir $\|\mathbf{w_2}\|$.

Svar: $\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Avståndet till U är $\sqrt{10}$.

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

Lösning: Med beteckningarna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ skriver vi systemet

$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Om vi kan hitta en egenbas $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ till A för $\mathbb{R}^2$, och gör basbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = [\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2]$, så blir $\mathbf{x}' = P\mathbf{y}'$ och vårt system övergår i

$P\mathbf{y}' = AP\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}' = D\mathbf{y}$

där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ är diagonalmatrisen given av egenvärdena till respektive egenvektor. Vi löser detta system: $\mathbf{y} = C_1 e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och översätter till ursprunglig bas:

$\mathbf{x} = P\mathbf{y} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$.

Bestäm egenvärdena till A ur karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, och respektive egenvektor ur systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A befinns ha egenvärdena $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$ och motsvarande egenvektorer

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Alltså är $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sätt in begynnelsevillkoret och lös ut C_1 och C_2.

Svar: $\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{cases}$

5. Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) ${}_{\mathcal{C}}\underset{\leftarrow}{P}{}_{\mathcal{B}}$.

Lösning: Vi vill bestämma matrisen ${}_{\mathcal{C}}\underset{\leftarrow}{P}{}_{\mathcal{B}}$ i sambandet $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}\underset{\leftarrow}{P}{}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, så gäller för koordinatvektorerna i respektive bas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Vi löser ut $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$ ur denna matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

och vår matris är funnen!

Svar: ${}_{\mathcal{C}}\underset{\leftarrow}{P}{}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Spegling i linjen $y = x + 1$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt

Motivering: Linjen går inte genom origo så speglingen avbildar ej nollvektorn på sig själv.

(b) Om A är en symmetrisk matris så är A diagonaliserbar.

Svar: Sant

Motivering: Theorem 2, p.451.

(c) Om A är en diagonaliserbar matris så är A symmetrisk.

Svar: Falskt

Motivering: Många icke-symmetriska matriser är också diagonaliserbara. Exempel finns i uppgifterna 2 och 5 på denna tenta.

(d) $U = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt

Motivering: U är inte sluten under skalärmultiplikation med ett negativt tal. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T \in U$ men $\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}^T$ tillhör inte U.

(e) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt oberoende.

Svar: Sant

Motivering: Att dimensionen av $\mathbf{R}^3$ är tre innebär att tre st. vektorer spänner upp rummet om och endast om de är linjärt oberoende. Se Theorem 12, p.259.

(f) Om A är en $n \times n$ matris och $(\operatorname{Col} A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$ så är $\det A \neq 0$.

Svar: Sant

Motivering: Att ortogonalkomplementet till kolonnrummet enbart består av nollvektorn innebär att kolonnrumet är hela $\mathbf{R}^n$. Dvs matrisens kolonner spänner upp $\mathbf{R}^n$, och därmed är A inverterbar (Theorem 8(h), p.129). Att A är inverterbar innebär i sin tur att $\det(A) \neq 0$ (Theorem 4, p.194).

7. Låt A vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet: *A är en inverterbar matris.* (1p)

Svar: Det är definitionen i boken man bör ge: se p.119. En $n \times n$ matris A sägs vara *inverterbar* om det finns en $n \times n$ matris B s.a. $AB = BA = I_n$.

(b) Bevisa enbart med stöd av definitionen ovan: (2p)
om $A^2 + A = I_n$ så är A inverterbar.

Svar: $A^2 + A = I_n \Leftrightarrow A(A + I_n) = (A + I_n)A = I_n$ så $A + I_n$ är inversen till A, per definition av inversen ovan.

(c) Bevisa: om A är inverterbar så är inte noll ett egenvärde till A. (1p)

Svar: Om A är inverterbar så finns ingen vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då finns heller ingen vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$.

(d) Bevisa: om A har ortogonala kolonner och ingen kolonn är nollvektorn så är A inverterbar. (2p)

Svar: Om kolonnerna är ortogonala och skilda från noll så är de speciellt linjärt oberoende (Theorem 4, p.384). Men en kvadratisk matris vars kolonner är linjärt oberoende är inverterbar (Theorem 8(e), p.129).