EN EXPLICIT FORMEL FÖR FIBONACCITALEN - ett exempel på användning av diagonalisering.

Fibonaccis talföljd definieras av rekursionsformeln

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \tag{1}$$

De första femton talen i följden är 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. För att kunna använda matrisdiagonalisering skriver vi om rekursionsformeln som

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Den övre raden i matrisekvationen uttrycker rekursionsformeln (1), medan den undre har (som bara säger att $x_{n-1} = x_{n-1}$) har lagts till för att vi ska få en matrisekvation. Vi finner nu:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots \quad \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Vi behöver alltså kunna beräkna allmänna potenser av A. Om vi kan diagonalisera A, kan vi lätt klara detta:

$$A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} \tag{4}$$

Vi söker egenvärdena till A genom att lösa karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Rötterna är

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vi söker motsvarande egenvektorer genom att lösa $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för dessa egenvärden, egenvektorerna blir kolonner i matrisen P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

Dess invers är

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_2} & 1 \\ \frac{1}{\lambda_1} & -1 \end{bmatrix}$$

Ekvation (3) och (4) ger nu med $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\quad D^{n-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1})$:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix}$$

(Observera att $\lambda_1 \lambda_2 = -1$).
Härav kan vi nu utläsa den explicita formeln för Fibonaccitalen:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Eftersom $|\lambda_2| < 1$, så går λ_2^n mot noll och för stora n är

$$x_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Faktum är att den senare formeln ger exakt rätt Fibonaccital för *alla* n om man avrundar till närmaste heltal! Med (5) kan man också se att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

som är det s k *gyllene snittet*.