MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 090314 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Martin Berglund

0762-721860

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Invertera matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Med hjälp av dessa inverser, lös matrisekvationen (3p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (4p)

(b) Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av (a): (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

4. (a) Definiera begreppen *bas* och *ortogonalbas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Låt $\mathcal{P}$ vara det plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm en ON-bas för $\mathcal{P}$. (2p)

(c) Bestäm ortogonalprojektionen av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}^T$ på planet $\mathcal{P}$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $p_1(x) = a + x - x^2$, $p_2(x) = -1 + x + ax^2$, $p_3(x) = a + 2x + 2x^2$ vara polynom i vektorrummet $\mathbb{P}_2$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att om $a = 1$ utgör p_1, p_2, p_3 en bas i $\mathbb{P}_2$. (2p)

(b) Ange alla $a \in \mathbb{R}$ sådana att polynomen p_1, p_2, p_3 inte är en bas i $\mathbb{P}_2$. (4p)

6. (a) Låt $T : V \to W$ vara en transformation från vektorrummet V till vektorrummet W. Vilka egenskaper skall T ha för att kallas linjär? (2p)

(b) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär transformation med standardmatrisen A. Ange en egenskap hos matrisen A som motsvarar att F är injektiv (one-to-one). Motivera ditt svar. (3p)

(c) Finns det någon injektiv linjär transformation F från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^3$. Motivera Ditt svar. (1p)

7. Låt $A = [a_{ij}]$ vara en $n \times n$-matris. Med spåret av A, $\mathrm{tr}(A)$, betecknar man summan av alla diagonalelementen hos matrisen A, dvs $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

(a) Bevisa att om A och B är 3×3-matriser så är $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (2p)

(b) Med hjälp av resultatet i (a) visa att om A är diagonaliserbar så är (4p)

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är egenvärdena till A.

Lycka till!
Lennart F

Anonym kod	**TMV141 Linjär algebra E** 090314	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Avgör om vektorerna i $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, är linjärt beroende. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm koordinaterna i standardbasen för den vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ som i basen (3p)
$\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\}$
har koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Bestäm baser för kolonnrum och nollrum till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös följande ekvationssystem med minstakvadrat-metoden. (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....