**MATEMATIK** **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 100114 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Fredrik Lindgren

0703 088 304

# TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, därefter granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** Denna uppgift finns på separat blad på vilket kortfattade lösningar och svar skall skrivas. **Endast svar ger inga poäng**. Detta blad **lossas och inlämnas som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga och väl motiverade lösningar inlämnas.

**2.** (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(c) Är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar. (1p)

**3.** (a) Ge exempel på $2 \times 2$-matriser $A$ och $B$ sådana att $AB \neq BA$ (1p)

(b) Lös matrisekvationen $AA^TX - X = AB^T$ där $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. (5p)

**4.** Låt $V$ vara det underrum i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ på $V$. Bestäm avståndet från $\mathbf{x}$ till $V$. (6p)

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**5.**
- Visa att avbildningen $F : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ som definieras genom (6p)

  $$F(f(x)) = xf'(x) + f(x+1)$$

  är linjär.
- Bestäm $F$:s matris $M$ i basen $\{1, x, x^2\}$.
- Bestäm $F$:s matris i en bas som består av egenvektorer till $M$.

**6.**
- Definiera vad som menas med en *symmetrisk* matris. (6p)
- Definiera begreppen *egenvärde* och *egenvektor* till en matris.
- Visa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer som hör till olika egenvärden till den symmetriska matrisen $A$ så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

**7.**
- Bevisa att en matris $A$ är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. (6p)
- Vilka värden kan determinanten av en inverterbar matris $A$ anta om alla element i både $A$ och $A^{-1}$ är heltal. Motivera ditt svar.
- Låt $A$ vara en kvadratisk matris. Bevisa att om $A^2$ har egenvärdet $\lambda^2$ så är $\lambda$ eller $-\lambda$ egenvärde för matrisen $A$.

Lycka till!
Lennart F

| Anonym kod | **TMV141 Linjär algebra E 100114** | sid.nummer **1** | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar och svar redovisas på anvisad plats.

(a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ är inverterbar. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ange en matris $P$ och en diagonalmatris $D$ så att $A = PDP^{-1}$. (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(c) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ och $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ är totalmatriser till tre ekvationssystem. Ange lösningarna till dessa ekvationssystem. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(d) Visa att $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor $\mathbf{u}$ vars koordinatvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(e) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ortonormerad bas för detta plan (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................