

1. (a) Avgör om matrisen  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$  är inverterbar.

Vi beräknar determinanten genom följande operationer: addera -4 ggr kolonn 1 till kolonn 4, utveckla efter rad 1, addera rad 3 till rad 1, utveckla efter rad 1, beräkna determinanten av den återstående 2x2-matrisen. Alltså:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & -4 \\ 3 & 8 & 6 & -12 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -7 & -5 & -4 \\ 8 & 6 & -12 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -12 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

-4. Då determinanten är  $\neq 0$ , är matrisen **inverterbar**.

- (b) Vektorerna  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  är egenvektorer till matrisen  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ . Ange en matris  $P$  och en diagonalmatris  $D$  så att  $A = PDP^{-1}$ .

Vi testar egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

och ser att motsvarande egenvärden är 2 respektive 6. Därmed är  $A = PDP^{-1}$  med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (c) Matriserna  $A = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$ ,  $B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$  och  $C = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$  är totalmatriser till tre ekvationssystem. Ange lösningarna till dessa ekvationssystem.

Sista systemet har en pivotposition i högerledet och saknar därmed lösning. I de övriga är andra variabeln fri (icke-pivotkolonn) och sätts som parameter  $t$ . Därmed får vi lösningarna

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

- (d) Visa att  $\mathcal{B} = \{ [1 \ -1 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 1]^T, [-1 \ 1 \ 1]^T \}$  är en bas för  $\mathbb{R}^3$ . Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor  $\mathbf{u}$  vars koordinatvektor  $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [2 \ -1 \ 1]^T$ . Bestäm koordinatvektorn  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$  för vektorn  $\mathbf{v} = [3 \ -1 \ 1]^T$
- 

Låt  $A$  vara matrisen vars kolonner  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  är de givna vektorerna. För att visa linjärt oberoende behöver vi lösa systemet  $Ax = \mathbf{0}$  och för att bestämma koordinaterna för  $\mathbf{v}$  behöver vi lösa systemet  $Ax = \mathbf{v}$ . Detta kan vi göra samtidigt:

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right].$$

Löser vi det homogena systemet, ser vi att vektorekvationen  $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$  endast har lösningen  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , därmed är kolonnvektorerna linjärt oberoende. Eftersom deras antal överensstämmer med rummets dimension, utgör de då en bas för  $\mathbb{R}^3$ .

Löser vi systemet med  $\mathbf{v}$  i högerledet, får vi ut koordinatvektorn  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1 \ 2 \ -2]^T$ . Slutligen, koordinaterna i standardbasen för  $\mathbf{u}$  är  $2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = [1 \ -2 \ 2]^T$ .

---

- (e) Vektorerna  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$  och  $\mathbf{v}_2 = [2 \ 1 \ 3]^T$  spänner upp ett plan i  $\mathbb{R}^3$ . Bestäm en ortonormerad bas för detta plan.
- 

Sätt

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då är  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2\}$  en ortogonal bas för planet. Det återstår att normera vektorerna. Sätt

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nu är  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  en ortonormerad bas för planet.

---

2. (a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

---

Vi skriver först systemet i matrisform:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 8 & -5 \end{array} \right]$$

Efter ett antal radoperationer har vi överfört systemet i en ekvivalent trappstegsform:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Bakåtsubstitution ger oss den entydiga lösningen

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -1.$$

**Svar:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1$

---

- (b) Skriv vektorn  $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T$  som linjärkombination av vektorerna  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$ ,  $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$  och  $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T$ .
- 

Enligt (a) har vi linjärkombinationen

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- (c) Är  $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T\}$  en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar.
- 

Titta på trappstegsmatrisen i (a). Motsvarande homogena system har bara triviala lösningen, vilket just innebär linjärt oberoende mellan kolonnerna.

---

3. (a) Ge exempel på  $2 \times 2$ -matriser  $A$  och  $B$  sådana att  $AB \neq BA$

---

Ta två olika matriser vilka som helst, så fungerar det troligen. T. ex:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Här får vi } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ medan } BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

(b) Lös matrisekvationen  $AA^T X - X = AB^T$  där  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  och  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

---

Vi skriver om systemet som

$$(AA^T - I)X = AB^T. \quad (1)$$

Först beräknar vi

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sedan

$$AA^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är uppenbarligen inverterbar, så (1) har den entydiga lösningen

$$X = (AA^T - I)^{-1}AB^T. \quad (2)$$

Vi behöver alltså invertera matrisen  $AA^T - I$ . Vi använder utvidgad matris och utnyttjar att  $[AA^T - I|I] \sim [I|(AA^T - I)^{-1}]$ :

$$[AA^T - I|I] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I|(AA^T - I)^{-1}]$$

Matrisen  $AA^T - I$  är tydligen sin egen invers.

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Substituting everything into (2) we find that

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 
4. Låt  $V$  vara det underrum i  $\mathbb{R}^3$  som spänns upp av vektorerna  $[1 \ 0 \ 0]^T$  och  $[3 \ 0 \ 4]^T$ . Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn  $\mathbf{x} = [1 \ 2 \ 3]^T$  på  $V$ . Bestäm avståndet från  $\mathbf{x}$  till  $V$ .
- 

Underrummet som spänns upp av de givna vektorerna måste vara  $xz$ -planet, eftersom de båda har  $y$ -koordinaten 0 och inte är parallella. Att projicera en vektor på detta plan innebär att man nollställer  $y$ -koordinaten och det efterfrågade avståndet är absolutbeloppet av  $y$ -koordinaten. Alltså: **den ortogonala projektionen är  $[1 \ 0 \ 3]^T$  och avståndet är 2.**

Mera generellt får man annars ortogonalisera basen och använda projektionsformeln  $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2$ , där  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  är den ortogonala basen. I detta fall skulle vi haft  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

---

5. • Visa att avbildningen  $F : \mathbb{P}_2[x] \rightarrow \mathbb{P}_2[x]$  som definieras genom

$$F(f(x)) = xf'(x) + f(x+1)$$

är linjär.

---

Man kontrollerar att  $F(f+g) = F(f) + F(g)$  och  $F(cf) = cF(f)$ . Detta följer av konstruktionen av  $F$ , att  $(f+g)' = f' + g'$ ,  $(f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$  samt att  $(cf)' = cf'$ ,  $(cf)(x+1) = cf(x+1)$ .

- 
- Bestäm  $F$ 's matris  $M$  i basen  $\{1, x, x^2\}$ .

---

Vi opererar på basvektorerna med  $F$ :

$$\begin{aligned} F(1) &= x \cdot 0 + 1 = 1, \\ F(x) &= x \cdot 1 + (x+1) = 2x + 1, \\ f(x^2) &= x \cdot (2x) + (x+1)^2 = 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Därmed är matrisen för  $F$  i basen  $\{1, x, x^2\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 
- Bestäm  $F$ 's matris i en bas som består av egenvektorer till  $M$ .

---

I en bas av egenvektorer, är matrisen för  $F$  en diagonalmatris med egenvärdena längs huvuddiagonalen. Men vår matris är triangulär, så dess egenvärden står redan längs huvuddiagonalen. Alltså: matrisen för  $F$  i en bas av egenvektorer är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

- 
6. • Definiera vad som menas med en *symmetrisk* matris.  
• Definiera begreppen *egenvärde* och *egenvektor* till en matris.  
• Visa att om  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är egenvektorer som hör till olika egenvärden till den symmetriska matrisen  $A$  så är  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  ortogonala.

---

Se läroboken!

- 
7. • Bevisa att en matris  $A$  är inverterbar om och endast om  $\det A \neq 0$ .

---

Se läroboken!

- 
- Vilka värden kan determinanten av en inverterbar matris  $A$  anta om alla element i både  $A$  och  $A^{-1}$  är heltal. Motivera ditt svar.

---

Vi konstaterar

- 1) Om en matris endast har heltalselement, så är determinanten ett heltal.
  - 2)  $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$
- Om produkten i 2) ska bli 1, måste alltså  $\det A = \pm 1$ .
-

- Låt  $A$  vara en kvadratisk matris. Bevisa att om  $A^2$  har egenvärdet  $\lambda^2$  så är  $\lambda$  eller  $-\lambda$  egenvärde för matrisen  $A$ .

---

Om  $\lambda^2$  är egenvärde till matrisen  $A^2$ , så är  $\lambda^2$  en karakteristisk rot för  $A^2$ :

$0 = \det(A^2 - \lambda^2 I) = \det((A - \lambda I)(A + \lambda I)) = \det(A - \lambda I) \det(A + \lambda I)$  (produktsatsen för determinanter). Därmed är antingen  $\det(A - \lambda I) = 0$  eller  $\det(A + \lambda I) = 0$ , vilket innebär att  $A$  har något av egenvärdena  $\lambda$  eller  $-\lambda$ .

---