

TMV141 Linjär algebra E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 13/1 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (14p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. (4p)

- (b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differential- (2p)
ekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = -10x_1(t) - 7x_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

3. (a) Förklara vad som menas med att matrismultiplikation är *associativ*. (1p)

- (b) Illustrera med ett exempel att matrismultiplikation inte är *kommutativ*. (1p)

- (c) Lös matrisekvationen (4p)

$$(AX + B)^T = X^T C,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande tre vektorer i \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm det värde på a som gör vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende. (3p)

- (b) Låt nu $a = 1$ och låt \mathcal{B} vara basen för \mathbb{R}^3 bestående av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och \mathbf{v}_3 . Bestäm (3p)
koordinatvektorn $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ då $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en 45-graders 'moturs' rotation kring en axel genom origo och riktad som vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$. (6p)

Bestäm T 's matris i standardbas på formen PMP^T .

OBS! Du behöver inte multiplicera ihop, ange bara matriserna P och M .

Bestäm också $T(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

6. Låt \mathbb{P}_2 vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. (6p)
Låt $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ vara den linjära transformation som ges av

$$T[p(t)] = (t^2 + t + 1)p''(t) - (1 + 2t)p'(t) + 2p(t).$$

Ange baser för

1) kärnan av T , dvs $K(T) = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 : T[p(t)] = 0\}$,

2) värderummet $R(T)$,

3) $K(T)^\perp$, dvs ortogonala komplementet till kärnan.

Att två polynom är ortogonala betyder här att deras koordinatvektorer i standardbasen för \mathbb{P}_2 är ortogonala.

7. (a) Definiera begreppet : A är en *ortogonalmatris*. (2p)
(b) Bevisa att om A är en $n \times n$ ortogonalmatris, så är $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (2p)
(c) Bevisa att om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till en ortogonalmatris A , så är $|\lambda| = 1$. (2p)

Lycka till!
Lennart F

Anonym kod	TMV141 Linjär algebra E 110113	sid.nummer 1	Poäng
------------	---------------------------------------	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\det(AB)$.

Lösning:

Svar:

(b) Bestäm inversen till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

(c) Ange baser för kolonrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

(d) Bestäm en ON-bas för planet i \mathbb{R}^3 som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 1 \ 2]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [-1 \ 2 \ 7]^T$. (3p)

Lösning:

Svar:

(e) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:(Det går bra att fortsätta på baksidan.)

Lösningar TMV141, Linjär Algebra E, 110113

1. (a) Vi använder produktlagen för determinanter: $\det AB = \det A \det B$. Eftersom matrisen B är triangulär så är dess determinant lika med produkten av talen längs diagonalen, dvs $\det(B) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. För matrisen A utför vi radoperationer som inte ändrar determinanten och får en triangulär matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Detta innebär att $\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-7) = 7$. Slutligen har vi därmed:
 $\det AB = 7 \cdot 30 = 210$.

- (b) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I]$ och förvandlar den till $[I|A^{-1}]$ via radoperationer, och får då

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

vilket visar att inversen är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Vi överför matrisen till en radekvivalent reducerad trappstegsmatris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Pivoterna ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A spänner upp dess kolonnrum. Alltså, en bas för $\text{Col}(A)$ är

$$\{[1 \ -1 \ 2 \ 4]^T, [1 \ 5 \ -1 \ 1]^T\}$$

För att hitta en bas till nollrummet löser vi ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och med $x_3 = s$, $x_4 = t$ blir lösningarna (dvs vektorerna i nollrummet)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger oss en bas för $\text{Nul}(A)$:

$$\text{Span}\{[-1 \ -1 \ 1 \ 0]^T, [-2 \ -1 \ 0 \ 1]^T\}$$

(d) Vi först ortogonalerar basen genom att byta ut \mathbf{v}_2 mot

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{18}{9} \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserar och producerar ON-basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Minstakvadratlösningen \hat{x} ges av $A^T A \hat{x} = A^T \mathbf{b}$. Vi löser detta system:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{array} \right].$$

Minstakvadratlösningen är alltså

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Egenvärdena beräknas genom att lösa ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$.

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer:

$\lambda_1 = -2$:

Vi har $A - (-2)I = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = 3$:

Vi har $A - 3I = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Därmed diagonaliseras A enligt $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen ges av $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

och begynnelsevillkoret $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger slutligen:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}$$

3. (a) Associativitet betyder att $(AB)C = A(BC)$ närhelst produkterna är definierade.

(b) De flesta "slumpvis valda" exempel duger. Här ett exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller att $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ medan $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Först kan vi transponera båda leden och får då

$$AX + B = (X^T C)^T = C^T X = CX, \quad \text{eftersom } C^T = C.$$

Detta medför att $B = CX - AX = (C - A)X$ så, under förutsättningen att $C - A$ är inverterbar, har vi följande formel för lösningen :

$$X = (C - A)^{-1}B.$$

Nu räknar vi. Först

$$C - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (C - A)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi ställer upp vektorerna som kolonner i en matris och överför den med radoperationer till en radekvivalent trappstegsmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5a - 7 \end{bmatrix}$$

De ursprungliga tre vektorerna är därmed linjärt beroende om och endast om $5a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7/5$.

(b) Vi har $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [a \ b \ c]^T$ där

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systemet med eliminationsmetoden (radoperationer):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

varur vi nedifrån och upp erhåller $c = 5$, $b = -3$, $a = 4$.

Därmed är $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = [4 \ -3 \ 5]^T$.

5. Detta är samma procedur som i laboration 2 (rotationer). Vi väljer en positivt orienterad ON-bas i vilken rotationen har en enkel matris. Låt rotationsvektorn vara tredje basvektorn, välj första vektorn ortogonal mot axeln, ta den andra som vektorprodukten av den tredje och den första (i denna ordning). Normalisera dem och ta dem som kolonner i P . M 's kolonner är bilderna av basvektorerna (i den tillfälliga basen) under 45° -vridningen.

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotationsmatrisen i standardbasen är nu alltså $R = PMP^T$, $T(\mathbf{v}) = R\mathbf{v}$.

För att vrida en vektor \mathbf{v} ska vi alltså multiplicera med R , men för att slippa räkna ut denna matris, kan vi multiplicera med en i taget:

$$P^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad MP^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad PMP^T\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ -2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Den sista vektorn är alltså $T(\mathbf{v})$.

6. Med $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ gäller

$$p(t) \in K(T) \iff T[p(t)] = 0 \iff 2a_0 - a_1 + 2a_2 = 0 \iff p(t) = a_0(1 + 2t) + a_2(2t + t^2)$$

Härav ser vi att $\{1 + 2t, 2t + t^2\}$ utgör en bas för $K(T)$ (polynomen är ju linjärt oberoende och spänner upp $K(T)$). Även $\{1 + 2t, -1 + t^2\}$ går bra.

Vidare ser vi att $T[p(t)]$ alltid är en konstant och av lineariteten är varje konstant också bild av ett polynom i \mathbb{P}_2 . Alltså är $\{1\}$ en bas för $R(T)$.

Rummet $K(T)^\perp$ spänns upp av polynom $a + bt + ct^2$ som är ortogonala mot båda basvektorerna för $K(T)$, dvs som satisfierar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = c = -2b$$

Alltså utgörs en bas för $K(T)^\perp$ av polynomet $-2 + t - 2t^2$.

Sammanfattningsvis:

$$R(T) = \text{Span}\{1\}, \quad K(T) = \text{Span}\{1 + 2t, 2t + t^2\} \quad K(T)^\perp = \text{Span}\{-2 + t - 2t^2\}.$$

7. (a) En $n \times n$ matris A sägs vara en ortogonalmatris om $A^T A = AA^T = I$.

(b) $\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T I\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

(c) Låt λ vara ett egenvärde till en $n \times n$ ortogonalmatris A . Då finns det en nollskild vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Men från (b) har vi då att

$$\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|,$$

och eftersom $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ så måste $|\lambda| = 1$.