KANINER OCH RÄVAR - ETT LINJÄRT DYNAMISKT SYSTEM analyserat med hjälp av diagonalisering.

En linjär modell

På en ö finns det kaniner och rävar. Rävarnas enda föda är kaniner, och kaninernas enda fiende är rävar. Antag att populationerna vid ett visst tillfälle består av x_0 rävar och y_0 kaniner. Om motsvarande populationer efter n år betecknas x_n respektive y_n, så antar vi att följande linjära samband gäller (då $n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{cases} x_n &= 0,4x_{n-1} + 0,3y_{n-1} \\ y_n &= -px_{n-1} + 1,2y_{n-1} \end{cases}$$

Detta kan vi skriva i matrisform:

$$\mathbf{x_n} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -p & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = A\mathbf{x_{n-1}}$$

På så sätt blir

$$\mathbf{x_1} = A\mathbf{x_0}, \quad \mathbf{x_2} = A\mathbf{x_1} = A^2\mathbf{x_0}, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{x_n} = A^n\mathbf{x_0} \ \ med \ \ \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Matrispotensen A^n kan beräknas via diagonalisering av A: om $A = PDP^{-1}$, så är $A^n = PD^nP^{-1}$. Speciellt är vi intresserade av vad som händer på lång sikt, dvs

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Normalglupska rävar: $p = 0,4$

Här får vi egenvärdena $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,6$, den diagonaliserande matrisen (vars kolonner är egenvektorer till respektive egenvärde) och dess invers:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrispotensen blir

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6^n \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2+6\cdot 0,6^n & 3-3\cdot 0,6^n \\ -4+4\cdot 0,6^n & 6-2\cdot 0,6^n \end{bmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} (n\to\infty)$$

Slutligen får vi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2x_0+3y_0 \\ -4x_0+6y_0 \end{bmatrix}$$

då $x \to \infty$. Detta betyder att populationerna stabiliseras i ett läge med dubbelt så många kaniner som rävar. Vi får dock förutsätta att $-2x_0 + 3y_0 > 0$, dvs att antalet kaniner från början är minst två tredjedelar av antalet rävar.

Alltför glupska rävar $p = 0,5$

Med samma beteckningar som ovan får vi här $\lambda_1 = 0,9,\ \lambda_2 = 0,7$,

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3\cdot 0,9^n+5\cdot 0,7^n & 3\cdot 0,9^n-3\cdot 0,7^n \\ -5\cdot 0,9^n+5\cdot 0,7^n & 5\cdot 0,9^n-3\cdot 0,7^n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här får vi $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs båda populationerna går mot utdöende.

Alltför nöjda rävar $p = 0,325$

Återigen med samma beteckningar, $\lambda_1 = 1,05,\ \lambda_2 = 0,55,$

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 13 & -6 \end{bmatrix},\ A^n = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -6\cdot 1,05^n + 26\cdot 0,55^n & 12\cdot 1,05^n - 12\cdot 0,55^n \\ -13\cdot 1,05^n + 13\cdot 0,55^n & 26\cdot 1,05^n - 6\cdot 0,55^n \end{bmatrix}$$

vilket för stora n är

$$\approx \frac{1,05^n}{20}\begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -13 & 26 \end{bmatrix}$$

Detta ger $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$, dvs en "befolkningsexplosion" för både kaniner och rävar. Snart blir dock kaninernas födotillgång något som måste tas hänsyn till i modellen.