MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-03-13 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Carl Lundholm ank. 5325

TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna inversen A^{-1} till matrisen A. (3p)

(b) Bestäm den unika lösningen $\mathbf{x}$ till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(c) Visa att $(A^{-1})^{-1} = A$ och att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (2p)

3. Låt $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

(b) Bestäm basbytesmatrisen $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

(c) Bestäm koordinatvektorn i standardbasen $\mathcal{E}$ för den vektor som i basen $\mathcal{B}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. (1p)

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Diagonalisera om möjligt A. (1p)

(c) Beräkna A^{10}. (1p)

(d) Ge ett exempel på en 2×2-matris som *inte* är diagonaliseringsbar. (1p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $\mathbb{P}_3$ beteckna vektorrummet bestående av alla polynom av grad högst 3. Betrakta transformationen $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$p(x) \mapsto \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix},$$

där p' betecknar derivatan av p, dvs. $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

(a) Visa att T är en *linjär* transformation. (2p)

(b) Hitta en bas för kärnan till T. (2p)

(c) Ange matrisrepresentationen av T relativt standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$ samt beräkna matrisens rang. (2p)

6. (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen (4p)

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet bestående av differentialekvationerna (4p)

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) &= y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -z(t) \end{aligned}$$

och begynnelsevillkoren

$$x(0) = y(0) = 3, \quad z(0) = 0.$$

7. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med en *minstakvadratlösning* $\hat{\mathbf{x}}$ till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Bestäm den vektor $\hat{\mathbf{b}}$ i kolumnrummet Col A till A som är närmast $\mathbf{b}$. (2p)

(c) Bestäm minstakvadratlösningen till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och beräkna minstakvadratfelet. (1p)

Lycka till!
Martin H

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka reella värden på talen g och h har ekvationssystemet (3p)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ hx_1 + x_2 + 3x_3 &= g \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

en unik (entydig) lösning, ingen lösning, respektive oändligt många lösningar?

Lösning:

....

(b) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna determinanten av A samt determinanten av AB.

Lösning:

....

(c) Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ är baser för ett vektorrum V sådana att (2p)

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2, \quad \mathbf{b}_2 = -3\mathbf{c}_1 - 7\mathbf{c}_2.$$

Ange dimensionen av V och bestäm basbytesmatrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Lösning:

....

(d) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös ekvationen $XA - 2B = X$ för 2×2-matrisen X.

Lösning:

....

(e) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller (2p)

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T,$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ utgör standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

(i) Beräkna $T\big(\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T\big)$.

(ii) Finn ett $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ med bild $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$.

Lösning:

....

(f) Låt W beteckna det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$. Beräkna den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ på planet W. (2p)

Lösning:

....

Lösningsförslag TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD, 170313

1. (a) Ekvationssystemet är ekvivalent med matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ h & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ h & 1 & 3 & g \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3/2 \\ 0 & 0 & 4h-4 & g + h/2 - 3/2 \end{array}\right],$$

dvs. $h \neq 1$ ger en unik lösning, $h = g = 1$ ger oändligt många lösningar och för övriga värden på g och h har vi inga lösningar.

(b) Kofaktorexpansion ger

$$\det(A) = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Eftersom B är triangulär ges dess determinant av produkten av diagonalelementen. Tillsammans med produktregeln för determinanten ger detta

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -3 \cdot 2 = -6.$$

(c) Per definition är dimensionen av V antalet vektorer i en bas för V, dvs. i detta fall har V dimension 2.
Basbytesmatrisen ges av

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}.$$

(d) Vi observerar

$$XA - 2B = X \Rightarrow XA - X = 2B \Rightarrow X(A - I_2) = 2B \Rightarrow X = 2B(A - I_2)^{-1}.$$

Direkta räkningar ger

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(e) (i) Eftersom T är linjär har vi

$$T(\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T) = T(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Vi behöver lösa ekvationen

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{x}_2) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

(f) Eftersom $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala mot varandra ges projektionen av

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 4/3 \\ 11/6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right],$$

vilket ger inversen

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Kom ihåg att en $n \times n$-matris B är inversen till en $n \times n$-matris A om och endast om

$$BA = I_n = AB.$$

Eftersom

$$AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$$

är $(A^{-1})^{-1} = A$, och

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_3^T = I_3, \quad A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_3^T = I_3,$$

vilket ger $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. (a) Vi behöver visa att $\mathcal{B}$ spänner $\mathbb{R}^3$ och är linjärt oberoende. Eftersom $\mathcal{B}$ innehåller tre vektorer räcker det att visa att $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende. Detta är fallet om och endast om matrisen $A = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$ är inverterbar, vilket är ekvivalent med att A är radekvivalent med enhetsmatrisen I_3. Vi har

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim I_3.$$

(b) Basbytesmatrisen $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ ges av

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[[\mathbf{b_1}]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{b_2}]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{b_3}]_{\mathcal{E}}\big] = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) För $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ har vi

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1,$$

vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 3, 1$.
Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 3$ observerar vi att

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $s \in \mathbb{R}$; och för $\lambda = 1$ har vi

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) En ortonormal mängd av egenvektorer ges av

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed följande ortogonala diagonalisering:

$$A = PDP^T, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Obs: För att lösa uppgiften krävs ej att diagonaliseringen är *ortogonal* men det underlättar eftersom man då slipper beräkna P^{-1}.)

(c) Genom att använda diagonaliseringen i (a) härleder vi

$$A^{10} = PD^{10}P^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (3^{10}+1)/2 & (3^{10}-1)/2 \\ (3^{10}-1)/2 & (3^{10}+1)/2 \end{bmatrix}.$$

(d) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är ej diagonaliseringsbar eftersom den endast har *en* linjärt oberoende egenvektor (t.ex $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$).

5. (a) För godtyckliga polynom $p, q \in \mathbb{P}_3$ och tal $c, d \in \mathbb{R}$ har vi

$$T(cp+dq) = \begin{bmatrix} (cp+dq)(0) \\ (cp+dq)'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0)+dq(0) \\ cp'(0)+dq'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp'(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dq(0) \\ dq'(0) \end{bmatrix}$$
$$= c\begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} q(0) \\ q'(0) \end{bmatrix} = cT(p) + dT(q),$$

dvs. T är linjär.

(b) Kärnan till T består av alla polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sådana att

$$\mathbf{0} = T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix},$$

vilket betyder att $p(x)$ är i kärnan till T om och endast om $p(x) = ax^3+bx^2$. En bas för kärnan ges därmed av polynomen x^2, x^3: det är uppenbart att de spänner kärnan och de är linjärt oberoende eftersom varje polynom av formen $ax^3 + bx^2$ har maximalt tre (reella) nollställen.

(c) Standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$ utgörs av $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ respektive $\mathcal{E} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$. Detta ger matrisrepresentationen

$$\begin{bmatrix} [T(1)]_\mathcal{E} & [T(x)]_\mathcal{E} & [T(x^2)]_\mathcal{E} & [T(x^3)]_\mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisens rang är dimensionen av dess kolumnrum vilket är 2.

6. (a) Eftersom B är triangulär ges egenvärdena av diagonalelementen, dvs. de är $-2, 1$ och -1. För att bestämma egenvektorerna svarande mot $\lambda = -2$ löser vi matrisekvationen $(A+2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = -2$ är $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.
I nästa steg löser vi matrisekvationen $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket betyder att egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = 1$ är $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1/3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.
Slutligen löser vi matrisekvationen $(A + I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och detta betyder att egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = -1$ är $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.

(b) Introducerar vi vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

kan vi skriva om systemet av differentialekvationer som

$$\mathbf{v}' = B\mathbf{v}.$$

Variabelbytet

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

diagonaliserar systemet:

$$y' = Dy, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{-2t} \\ be^{t} \\ ce^{-t} \end{bmatrix},$$

där a, b, c är godtyckliga konstanter. Detta ger

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{-2t} + (b/3)e^{t} - 2ce^{-t} \\ be^{t} - ce^{-t} \\ ce^{-t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren kräver att

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b/3 - 2c \\ b - c \\ c \end{bmatrix},$$

vilket har den unika lösningen $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$.

7. (a) Minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är den vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ sådan att $||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| \leq ||\mathbf{b} - A\mathbf{x}||$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Eftersom kolumnerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ i A är ortogonala ges $\hat{\mathbf{b}}$ av

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col } A}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 13/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

(c) Eftersom minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ sammanfaller med lösningen till $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ har vi

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratfelet är

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| = || \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^T || = \sqrt{5/6}.$$