MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-06-08 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Tim Cardilin
ank. 5325

TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Betrakta avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$T(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Finn en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ med bild $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$. (2p)

(c) Låt R beteckna en rektangel med bredd 2 och höjd 3. Beräkna arean av parallellogrammet $T(R)$, dvs. bilden av R med avseende på T. (2p)

3. (a) Konstruera en ortonormal bas för radrummet Row(A) till matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm rangen för matrisen A och beräkna dimensionen av dess nollrum. (2p)

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med att en matris är symmetrisk och ange om matrisen A är symmetrisk eller ej. (1p)

(b) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till A. (4p)

(c) Diagonalisera om möjligt matrisen A. (1p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Definiera vad som menas med ett delrum H av ett vektorrum V. (2p)

(b) Låt P beteckna den mängd som består av alla polynom av formen $p(x) = ax + bx^3$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Visa att P utgör ett delrum av vektorrummet $\mathbb{P}_3$ bestående av alla polynom av grad 3 eller lägre. (2p)

(c) Beräkna dimensionen av P. (2p)

6. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på planet vars ekvation är $x + y + z = 0$. (6p)

7. (a) Visa att den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$ är positivt definit. (2p)

(b) I landet Luzitanien bor människorna antingen i städerna eller på landsbygden. Varje år flyttar 30% av landsbygdsborna in till städerna och 10% av stadsborna flyttar ut på landsbygden. (Vi antar att den totala folkmängden i Luzitanien är konstant.)

i. Bestäm migrationsmatrisen för denna Markovkedja. (1p)

ii. Antag att 60% av befolkningen bor i städerna år 2017. Hur stor andel av befolkningen bor i städerna år 2018? (1p)

iii. I det stabila (steady-state) tillståndet, hur stor andel av befolkningen bor i städerna? (2p)

Lycka till!
Martin H

Anonym kod	TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD 2017-06-08	sidnr 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lös ekvationen $AXA^T = B$ för 2×2-matrisen X.

Lösning:

. . . .

(b) Låt (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & -3\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och beräkna koordinatvektorn $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$.

Lösning:

. . . .

(c) Beräkna den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ på det plan W i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$. (2p)

Lösning:

. . . .

Var god vänd!

(d) För vilka (reella) värden på talet g är de tre vektorerna (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & g\end{bmatrix}^T,$$

linjärt oberoende?

Lösning:

. . . .

(e) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller (3p)

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}^T, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

(i) Beräkna $T\big(\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\end{bmatrix}^T\big)$.

(ii) Bestäm standardmatrisen A_T till T.

(iii) Bestäm nollrummet till A_T.

Lösning:

. . . .

(f) Beräkna determinanten av B^{-1} där (2p)

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Lösning:

. . . .

Lösningsförslag TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD, 170608

1. (a) Vi observerar

$$AXA^T = B \Rightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}.$$

Direkta räkningar ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$
$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom $\mathcal{B}$ innehåller 3 vektorer utgör den en bas för $\mathbb{R}^3$ om och endast om den är linjärt oberoende. För att visa detta bildar vi den utökade koefficientmatrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Vi har därmed visat att matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ har ett pivotelement i varje rad vilket ger att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt oberoende. Genom bakåtsubstitution beräknar vi koordinatvektorn

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -3/2 \end{bmatrix}^T.$$

(c) Eftersom $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är ortogonala mot varandra ges projektionen av

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1}\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2}\mathbf{x}_2 = \frac{5}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 5/9 \end{bmatrix}.$$

(d) Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & g \end{bmatrix}$$

har en noll-skild determinant. En kofaktorutveckling längs andra raden ger att determinanten har värdet g, dvs. vektorerna är linjärt oberoende om och endast om $g \neq 0$.

(e) (i) Eftersom T är linjär har vi

$$T(\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T) = T(-\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = -T(\mathbf{e}_1)+3T(\mathbf{e}_2)+T(\mathbf{e}_3) = -\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(ii) Standardmatrisen ges av

$$A_T = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Nollrummet till A_T består av all lösningar till den homogena matrisekvationen $A_T\mathbf{x} = 0$, dvs.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ekvationssystemet har en fri variabel och dess lösningar (och därmed nollrummet till A_T) ges av

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -3/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(f) En kofaktorexpansion ger

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Detta betyder att $\det(B^{-1}) = 1/\det(B) = 1/12$.

2. (a) För godtyckliga vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ och tal $c, d \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cx_1 + dy_1 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} (cx_1 + dy_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (cx_2 + dy_2) \\ &= c \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 \right) + d \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 \right) \\ &= c \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = cT(\mathbf{x}) + dT(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

dvs. T är linjär.

(b) Vi söker en lösning till matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Genom multiplikation med inversen till matrisen får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}.$$

(c) Eftersom rektangeln har area 6 gäller att

$$\text{Area av } T(R) = \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \cdot (\text{area av } R) = 12.$$

3. (a) Vi observerar att (rad)vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(som utgör raderna i A) är linjärt oberoende. Genom att använda Gram-Schmidts metod konstruerar vi en ortogonal bas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ för Row(A). Först tar vi

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sedan

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

och till sist

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Genom att dividera $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ med respektive norm (= 2 i alla fall) erhåller vi den ortonormala basen

$$\mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har

$$\text{rang } A = \dim(\text{Row } A) = 3$$

och rang-satsen ger

$$\dim(\text{Nul } A) = 4 - \text{rang } A = 1.$$

4. (a) En matris A är symmetrisk om och endast om $A^T = A$. Detta är uppenbart fallet för den matris A som ges i uppgiften.

(b) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((2-\lambda)^2 - 9\big),$$

vilket ger egenvärdena $\lambda = 1, -1, 5$.
Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 1$ observerar vi att

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \in \mathbb{R}$ med $s \neq 0$; för $\lambda = -1$ har vi

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$ med $t \neq 0$; och för $\lambda = 5$ har vi

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = u\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $u \in \mathbb{R}$ med $u \neq 0$.

(c) En ortonormal mängd av egenvektorer ges av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T.$$

Vi har därmed följande ortogonala diagonalisering:

$$A = PDP^T, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Obs: För att lösa uppgiften krävs ej att diagonaliseringen är *ortogonal* men det underlättar eftersom man då slipper beräkna P^{-1}.)

5. (a) Vi säger att H är ett delrum av ett vektorrum V om H är en delmängd av V och

(a) H innehåller nollvektorn $\mathbf{0} \in V$,
(b) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ ger att $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$,
(c) $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in H$ ger att $c\mathbf{u} \in H$.

(b) Eftersom $p(x) = ax + bx^3$ har grad 3 är P en delmängd av $\mathbb{P}_3$. Genom att välja $a = b = 0$ erhåller vi nollvektorn (polynomet $p(x) = 0$) i $\mathbb{P}_3$,

$$(ax + bx^3) + (cx + dx^3) = (a + c)x + (b + d)x^3$$

och

$$c(ax + bx^3) = (ca)x + (cb)x^3,$$

dvs samtliga villkor (a)–(c) är uppfyllda.

(c) Dimensionen av P är antalet element (polynom) i en bas för P, dvs i en linjärt oberoende delmängd som spänner P. Vi observerar att $\{x, x^3\}$ är linjärt oberoende och spänner P vilket ger att P har dimensionen 2.

6. T avbildar planets normal på $\mathbf{0}$ och alla vektorer i planet på sig själva. Därför konstruerar vi först en bas i $\mathbb{R}^3$ som består av två vektorer i planet samt en normalvektor. Ekvationen $x+y+z=0$, som karakteriserar planet, har lösningarna $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & t & -s-t \end{bmatrix}^T$ med $s,t \in \mathbb{R}$ och en bas för planet ges därmed av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

En normalvektor är

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Med avseende på basen bestående av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ har T matrisrepresentationen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom basbytesmatrisen från basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ till standardbasen är

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ges standardmatrisen för T av PDP^{-1}. Inversen P^{-1} till P kan tex. beräknas genom radreduktion, vilket ger

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och därmed

$$PDP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Vi behöver visa att $Q(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq 0$. Detta kan antingen åstadkommas genom att observera

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_3)^2$$

eller genom att skriva om $Q(\mathbf{x})$ på formen $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ och visa att samtliga egenvärden för A är positiva.

(b) (i) Migrationsmatrisen P ges av

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

där den första raden/kolumnen svarar mot städerna och den andra raden/kolumnen svarar mot landsbygden.

(ii) Eftersom tillståndsvektorn för år 2017 är $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}^T$ har vi att tillståndsvektorn för år 2018 är

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,34 \end{bmatrix},$$

dvs. 66% av befolkningen bor i städerna år 2018

(iii) Det stabila tillsåndet ges av en egenvektor till P med egenvärde 1. Vi observerar att matrisekvationen $(P - I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösningarna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3s & s \end{bmatrix}^T$ med $s \in \mathbb{R}$. För att $\mathbf{x}$ ska vara en tillståndsvektor krävs att $3s + s = 1$, dvs. $s = 1/4$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}^T$. Andelen av befolkningen som bor i städerna är därmed 75% i det stabila tillsåndet.