MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-08-19 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Adam Malik
ank. 5325

TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Betrakta den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör standardbasen i $\mathbb{R}^3$

(a) Definiera vad som menas med att T är en *linjär avbildning.* (2p)

(b) Bestäm matrisrepresentationen A av T relativt standardbasen. (2p)

(c) Konstruera en ortonormal bas för radrummet $\text{Row}(A)$ till A. (3p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix}8 & 4\\-10 & -6\end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matriser P och D sådana att D är en diagonal matris och $A = PDP^{-1}$. (3p)

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet (2p)

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 8x_1(t) + 4x_2(t),\\ x_2'(t) &= -10x_1(t) - 6x_2(t),\\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 2.\end{aligned}$$

4. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Definiera begreppet *bas* för ett vektorrum. (2p)

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{b}_3$ sådan att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Motivera ditt svar! (2p)

(c) Bestäm basbytesmatrisen $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Visa att den kvadratiska formen (2p)

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

är positivt definit, t.e.x. genom att använda dina resultat från (a).

(c) Ge ett exempel på en indefinit kvadratisk form. (2p)

6. Antal ljudpulser y (per minut) som en syrsa ger ifrån sig vid temperatur t (°C) kan med ganska stor noggrannhet beskrivas av en linjär modell. Antag att ett experiment ger följande mätdata:

ljudpulser y	temperatur t
44	7
59	11
75	12
90	14

Bestäm minsta-kvadrat-linjen för dessa mätdata. (4p)

7. (a) Visa att delmängden (3p)

$$H = \{X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}\ X = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

bestående av de 2×2-matriser $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ som har spår

$$\mathrm{Tr}\ X = X_{11} + X_{22} = 0,$$

är ett delrum till vektorrummet $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bestående av alla 2×2-matriser.

(b) Visa att matriserna (3p)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för H och ange dimensionen av H.

Lycka till!
Martin H

Anonym kod	TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD 2017-08-19	sidnr	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna determinanten av A och volymen av den parallellepiped som spänns upp av kolumnerna i A samt beräkna determinanten av A^3.

Lösning:

. . . .

(b) Visa att den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av (2p)

$$T(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

är injektiv, dvs. $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$ om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Lösning:

. . . .

(c) Bestäm det ortogonala komplementet till linjen $2x_1 - 3x_2 = 0$ i $\mathbb{R}^2$. (2p)

Lösning:

. . . .

Var god vänd!

(d) Beräkna dimensionen av delrummet (2p)

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a+b-c \\ b-c \\ 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

av $\mathbb{R}^3$

Lösning:

. . . .

(e) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(i) Beräkna inversen A^{-1} av A.

(ii) Bestäm den unika lösningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lösning:

. . . .

(f) Låt (2p)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lös ekvationen $P(X - A)P^{-1} = B$ för 2×2-matrisen X.

Lösning:

. . . .

Lösningsförslag TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD, 170819

1. (a) En kofaktorexpansion ger

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Volymen av parallellepipeden ges av $|\det(A)| = 4$ och

$$\det(A^3) = (\det(A))^3 = -64.$$

(b) Kom ihåg att T är injektiv om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, där $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, endast har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ inverterbar vilket betyder att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till ekvationen i fråga.

(c) Linjen består av alla vektorer av formen

$$a \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

dvs. dess ortogonala komplement ges av de vektorer $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$ som uppfyller

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(d) Kom ihåg att dimensionen av H ges av antalet vektorer i en bas för H. Observera att

$$H = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Det är nu tydligt att H spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ som är linärt oberoende, dvs. de utgör en bas för H vars dimension därmed är 2.

(e) (i) Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

vilket betyder att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Den unika lösningen är därmed

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8/3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(f) Observera att

$$P(X-A)P^{-1} = B \Leftrightarrow X = P^{-1}BP + A.$$

Direkta räkningar visar att $P^{-1} = P$ och därmed att

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi säger att $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning om vi, för godtyckliga vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ och tal $c, d \in \mathbb{R}$, har

$$T(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cT(\mathbf{x}) + dT(\mathbf{y}).$$

(b) Matrisrepresentationen A av T relativt standardbasen ges av

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi observerar att (rad)vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(som utgör raderna i A) är linjärt oberoende. (Detta kan t.e.x. ses genom att beräkna determinanten av A och notera att den ej är noll.) Genom att använda Gram-Schmidts metod konstruerar vi en ortonormal bas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ för Row(A). Först tar vi

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sedan

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och till sist

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Genom att dividera $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ med respektive norm erhåller vi den ortonormala basen

$$\mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi börjar med att beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till A. Genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ -10 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

ser vi att egenvärdena är $\lambda = 4, -2$.

Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 4$ har vi

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$; och för $\lambda = -2$ gäller att

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$.

Detta betyder att matriserna

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

uppfyller $A = PDP^{-1}$.

(b) Introducerar vi vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

kan vi skriva om systemet av differentialekvationer som

$$\mathbf{v}' = A\mathbf{v}.$$

Variabelbytet

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y}$$

diagonaliserar systemet:

$$y' = Dy.$$

Vi har därmed

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{4t} \\ be^{-2t} \end{bmatrix},$$

där a, b är godtyckliga konstanter. Detta ger

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{4t} + 2be^{-2t} \\ -ae^{4t} - 5be^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren kräver att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a - 5b \end{bmatrix},$$

vilket har den unika lösningen $a = 3$, $b = -1$.

4. (a) Vi säger att en mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ utgär en bas för ett vektorrum V om

- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende,
- $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

(b) Vi kan t.e.x. välja $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Eftersom $\mathbb{R}^3$ har dimension 3 räcker det att visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ är linjärt oberoende. Detta är fallet om och endast om matrisen $A = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$ är inverterbar, vilket är ekvivalent med att A är radekvivalent med enhetsmatrisen I_3. Vi har

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

(c) Basbytesmatrisen $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ ges av

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \big[[\mathbf{b_1}]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{b_2}]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{b_3}]_{\mathcal{E}}\big] = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4),$$

vilket ger egenvärdena $\lambda = 4, 2, 1$.
Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 4$ observerar vi att

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$; för $\lambda = 2$ har vi

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$; och för $\lambda = 1$ har vi

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = u\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $u \neq 0$.

(b) Vi observerar att

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

och eftersom alla egenvärden till A är positiva är därmed den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x})$ positivt definit.

(c) Kom ihåg att en kvadratisk form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ är indefinit om och endast om A har både positiva och negativa egenvärden. Ett konkret exempel ges därmed av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. För att bestämma minsta-kvadrat-linjen

$$y = \beta_0 + \beta_1 t$$

introducerar vi

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 44 \\ 59 \\ 75 \\ 90 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix},$$

och löser normalekvationen

$$X^T X\beta = X^T\mathbf{y}.$$

Vi har

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 44 \\ 44 & 510 \end{bmatrix}, \quad X^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 268 \\ 3117 \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 44 \\ 44 & 510 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 268 \\ 3117 \end{bmatrix} = \frac{1}{104}\begin{bmatrix} 510 & -44 \\ -44 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 268 \\ 3117 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5 \\ 6,5 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Eftersom $\operatorname{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$ innehåller H noll-matrisen. Om $\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} Y = 0$ har vi

$$\operatorname{Tr}(X+Y) = \operatorname{Tr}\begin{bmatrix}X_{11}+Y_{11} & X_{12}+Y_{12}\\ X_{21}+Y_{21} & X_{22}+Y_{22}\end{bmatrix} = X_{11}+Y_{11}+X_{22}+Y_{22} = \operatorname{Tr} X + \operatorname{Tr} Y = 0.$$

Vidare har vi, för alla $c \in \mathbb{R}$, att

$$\operatorname{Tr}(cX) = \operatorname{Tr}\begin{bmatrix}cX_{11} & cX_{12}\\ cX_{21} & cX_{22}\end{bmatrix} = cX_{11} + cX_{22} = c\operatorname{Tr} X = 0.$$

Med andra ord, delmängden H av $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ innehåller noll-matrisen och är sluten under både addition och multiplikation med skalär, vilka utgör de tre villkor som ska vara uppfyllda för att H ska kallas ett delrum till $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Vi observerar att om $\operatorname{Tr}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = a + d = 0$ så gäller att

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = aE + bF + cG,$$

dvs. $\{E, F, G\}$ spänner H och det återstår att visa att de är linjärt oberoende, vilket blir tydligt då man observerar

$$\lambda E + \mu F + \nu G = \begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & -\lambda\end{bmatrix},$$

vilket ger noll-matrisen om och endast om $\lambda = \mu = \nu = 0$. Eftersom basen innehåller tre element har H dimension 3.