MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2018-03-12 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Barbara Schnitzer
ank. 5325

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. Låt

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Avgör om matrisen M är inverterbar. (1p)

(b) Diagonalisera om möjligt M, dvs. konstruera en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $M = PDP^{-1}$. (4p)

(c) Ge ett exempel på en matris som *inte* är diagonaliseringsbar. Motivera ditt svar! (1p)

3. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(a) Definiera begreppet *bas* för ett vektorrum. (1p)

(b) Konstruera en ortonormal bas för det delrum W av $\mathbb{R}^3$ som spänns av $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (3p)

(c) Bestäm det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W. (2p)

4. Betrakta den linjära transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med ett *delrum* H av vektorrummet $\mathbb{R}^3$ och vad some menas med *kärnan* till den linjära transformation T. (2p)

(b) Visa att kärnan till T är ett delrum av $\mathbb{R}^3$. (2p)

(c) Beräkna dimensionen av kärnan till T. (2p)

5. I landet Luzitanien bor människorna antingen i städerna eller på landsbygden. Varje år flyttar 20% av landsbygdsborna in till städerna och 10% av stadsborna flyttar ut på landsbygden. (Vi antar att den totala folkmängden i Luzitanien är konstant.)

(a) Bestäm migrationsmatrisen för denna Markovkedja. (1p)

(b) Antag att 50% av befolkningen bor i städerna år 2018. Hur stor andel av befolkningen bor på landsbygden år 2020? (1p)

(c) I det stabila (steady-state) tillståndet, hur stor andel av befolkningen bor på landsbygden? (2p)

6. (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen (4p)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet bestående av differentialekvationerna (4p)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) &= 2y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -z(t) \end{aligned}$$

och begynnelsevillkoren

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

7. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på planet vars ekvation är $y + z = 0$. (6p)

Lycka till!
Martin H

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som uppfyller (3p)

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

(i) Beräkna $T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\right)$.

(ii) Bestäm standardmatrisen A_T till T.

(iii) Beräkna rangen av A_T.

Lösning:

....

(b) För vilka (reella) värden på talet g utgör de tre vektorerna (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & g\end{bmatrix}^T,$$

en bas för $\mathbb{R}^3$?

Lösning:

....

Var god vänd!

(c) Beräkna determinanten av $B^T A^T$ där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

. . . .

(d) Beräkna speglingen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ i linjen $x + y = 0$. (2p)

Lösning:

. . . .

(e) Beräkna inversen A^{-1} av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

. . . .

(f) Ge ett exempel på en matris som har egenvärden 1 och 2. Motivera ditt svar! (2p)

Lösning:

. . . .

Lösningsförslag TMV142/186 Inledande Matematik Z/TD, 180312

1. (a) (i) Genom att använda att T är linjär erhåller vi

$$T\big(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\big) = T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = T(\mathbf{e}_1) - T(\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(ii) Standardmatrisen ges av

$$A_T = \begin{bmatrix}T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

(iii) Kom ihåg att matrisens rang är dimensionen av dess kolumnrum. Eftersom kolumnerna (enligt (i)) är linjärt beroende men (t.ex.) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ är linjärt oberoende (pga. ej proportionella), har A_T rang 2.

(b) Kom ihåg att vektorerna utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ om och endast om de är linjärt oberoende och spänner $\mathbb{R}^3$. Eftersom $\mathbb{R}^3$ har dimension 3 räcker det att bestämma för vilka g-värden de är linjärt oberoende. Vi betraktar därför matrisen $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ och radreducerar:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & g\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\\0 & -1 & g\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1/2\\0 & 0 & g-1/2\end{bmatrix}.$$

Detta ger att matrisen $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ har pivotelement i varje rad, och därmed att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende, om och endast om $g \neq 1/2$.

(c) Vi har

$$\det(B^T A^T) = \det\big((AB)^T\big) = \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Eftersom A är en triangulär matris har vi

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

och en kofaktorexpansion längs första kolumnen i B ger

$$\det B = 2\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 8 - 6 = 2.$$

Svaret är därmed $\det(B^T A^T) = 6 \cdot 2 = 12$.

(d) Vi observerar att $\mathbf{n} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ är en normalvektor till linjen $x + y = 0$ och skriver

$$\mathbf{v} = \mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) + \hat{\mathbf{v}}$$

där $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen $x + y = 0$. Speglingen ges därmed av

$$-\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - 2\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}}\mathbf{n} = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix},$$

(vilket även kan visas genom ett direkt geometriskt argument).

(e) Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2\\0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right],$$

dvs.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & -3 & 2\\1 & 3/2 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

(f) Kom ihåg att en matris A har egenvärdet λ om det existerar en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sådan att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Enklast möjliga exempel är därmed 2×2-matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Eftersom första och tredje kolumnen är identiska, och därmed linjärt beroende, är matrisen ej inverterbar. (Detta kan även visas på ett antal andra sätt, t.ex. genom att beräkna matrisens determinant.)

(b) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1\big),$$

vilket ger egenvärdena $\lambda = 1, 0, 2$.

Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 1$ observerar vi att

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \in \mathbb{R}$; för $\lambda = 0$ har vi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$; och för $\lambda = 2$ har vi

$$M - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$.

En ortonormal mängd av egenvektorer ges av

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

och vi har därmed följande ortogonala diagonalisering:

$$M = PDP^T, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Obs: För att lösa uppgiften krävs ej att diagonaliseringen är *ortogonal* men det underlättar eftersom man då slipper beräkna P^{-1}.)

(c) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är ej diagonaliseringsbar eftersom den endast har *en* linjärt oberoende egenvektor (t.ex $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$).

3. (a) En mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sägs utgöra en bas för ett vektorrum V om

- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende,
- $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

(b) Vi använder Gram-Schmidts metod för att först konstruera en ortogonal bas: Vi låter $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T.$$

Längden av $\mathbf{u}_1$ är $\sqrt{3}$ och längden av $\mathbf{u}_2$ är $\sqrt{6}/3$. En ortonormal bas för W ges därmed av

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_1, \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{u}_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(c) Det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W består av alla vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ som är ortogonala mot W, vilket är fallet om och endast om $\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}_1 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{v}_2 = 0$, dvs. om och endast om $x - y + z = y = 0$. Detta ekvationssystem har lösningarna $\begin{bmatrix} -z & 0 & z \end{bmatrix}^T$, där $z \in \mathbb{R}$, och därmed följer att $W^\perp$ är den linje som spänns av vektorn $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

4. (a) En delmängd $H \subset \mathbb{R}^3$ sägs vara ett delrum av $\mathbb{R}^3$ om

- $\mathbf{0} \in H$,
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$,
- $\mathbf{u} \in H, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\mathbf{u} \in H$.

Kärnan $\ker T$ till T ges av

$$\ker T = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

(b) Eftersom T är linjär har vi $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dvs. $\mathbf{0} \in \ker T$, och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker T$ samt $c \in \mathbb{R}$ ger

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

dvs. $\mathbf{u} + \mathbf{v}, c\mathbf{u} \in \ker T$.

(c) Observera att $\ker T$ består av alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Radreducering ger

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dvs. $\ker T$ spänns av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och har därmed dimension 1.

5. (a) Migrationsmatrisen M ges av

$$M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$$

där den första raden/kolumnen svarar mot städerna och den andra raden/kolumnen svarar mot landsbygden.

(b) Eftersom tillståndsvektorn för år 2018 är $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^T$ har vi att tillståndsvektorn för år 2020 är

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,585 \\ 0,415 \end{bmatrix},$$

dvs. $41,5\%$ av befolkningen bor på landsbygden år 2020.

(c) Det stabila tillsåndet ges av en egenvektor till M med egenvärde 1. Vi observerar att matrisekvationen $(M - I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösningarna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2s & s \end{bmatrix}^T$ med $s \in \mathbb{R}$. För att $\mathbf{x}$ ska vara en tillståndsvektor krävs att $2s + s = 1$, dvs. $s = 1/3$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$. Andelen av befolkningen som bor på landsbygden är därmed ca 33% i det stabila tillsåndet.

6. (a) Eftersom B är triangulär ges egenvärdena av diagonalelementen, dvs. de är $1, 2$ och -1.
För att bestämma egenvektorerna svarande mot $\lambda = 1$ löser vi matrisekvationen $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = 1$ är $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.
I nästa steg löser vi matrisekvationen $(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket betyder att egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = 2$ är $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.
Slutligen löser vi matrisekvationen $(A + I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och detta betyder att egenvektorerna svarande mot egenvärdet $\lambda = -1$ är $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 5/6 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$.

(b) Introducerar vi vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

kan vi skriva om systemet av differentialekvationer som

$$\mathbf{v}' = B\mathbf{v}.$$

Variabelbytet

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

diagonaliserar systemet:

$$y' = Dy, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^t \\ be^{2t} \\ ce^{-t} \end{bmatrix},$$

där a, b, c är godtyckliga konstanter. Detta ger

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^t + be^{2t} + 5ce^{-t} \\ be^{2t} - 4ce^{-t} \\ 6ce^{-t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren kräver att

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b + 5c \\ b - 4c \\ 6c \end{bmatrix},$$

vilket har den unika lösningen $a = -13/2$, $b = 4$, $c = 1/2$.

7. T avbildar planets normal på $\mathbf{0}$ och alla vektorer i planet på sig själva. Därför konstruerar vi först en bas i $\mathbb{R}^3$ som består av två vektorer i planet samt en normalvektor. Ekvationen $y + z = 0$, som karakteriserar planet, har lösningarna $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & t & -t \end{bmatrix}^T$ med $s, t \in \mathbb{R}$ och en bas för planet ges därmed av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

En normalvektor är

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Med avseende på basen bestående av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ har T matrisrepresentationen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom basbytesmatrisen från basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ till standardbasen är

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ges standardmatrisen för T av PDP^{-1}. Inversen P^{-1} till P kan tex. beräknas genom radreduktion, vilket ger

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

och därmed

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$