MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-06-07 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Barbara Schnitzer
ank. 5325

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna inversen A^{-1} till matrisen A. (3p)

(b) Bestäm den unika lösningen $\mathbf{x}$ till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(c) Visa att $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. (2p)

3. Betrakta matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Konstruera en bas för kolumnrummet $\operatorname{Col} M$ till M. (2p)

(b) Konstruera en bas för nollrummet $\operatorname{Nul} M$ till M. (2p)

(c) Konstruera en ortogonal bas för $\operatorname{Col} M$. (2p)

4. Hookes lag säger att längden L (m) av en fjäder beror linjärt av den kraft F (N) som fjädern utsätts för, dvs.

$$L = a + bF$$

för några (fjäder)konstanter a och b. Antag att ett experiment ger följande mätdata:

kraft F	längd L
2	$8,2$
4	$11,6$
6	$14,3$
8	$17,5$

Bestäm minsta-kvadrat-linjen för dessa mätdata. (4p)

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med att en matris är symmetrisk och ange om matrisen A är symmetrisk eller ej. (1p)

(b) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(c) Diagonalisera om möjligt matrisen A. (2p)

6. Låt $\mathbb{P}_3$ beteckna vektorrummet bestående av alla polynom av grad högst 3. Betrakta transformationen $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$p(x) \mapsto \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix},$$

där p' betecknar derivatan av p, dvs. $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

(a) Visa att T är en *linjär* transformation. (2p)

(b) Hitta en bas för kärnan till T. (2p)

(c) Ange matrisrepresentationen av T relativt standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$ samt beräkna matrisens rang. (2p)

7. Låt H beteckna det delrum av $\mathbb{R}^4$ som består av samtliga vektorer av formen $\begin{bmatrix} a & b & b & b \end{bmatrix}^T$ med $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Definiera vad som menas med att H är ett delrum av $\mathbb{R}^4$. (2p)

(b) Konstruera en ortonormal bas för H. (3p)

(c) Beräkna avståndet från punkten $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T$ till delrummet H. (3p)

Lycka till!
Martin H

Anonym kod	**TMV142/186 Linjär algebra Z/TD 2018-06-07**	sidnr **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}4 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och beräkna koordinatvektorn $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$.

Lösning:

....

(b) För vilka reella värden på talen g och h har ekvationssystemet (3p)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ hx_1 + x_2 + x_3 &= g \end{aligned}$$

en unik (entydig) lösning, ingen lösning, respektive oändligt många lösningar?

Lösning:

....

Var god vänd!

(c) Ge ett exempel på en kvadratisk form som är indefinit. Motivera ditt svar! (2p)

Lösning:

. . . .

(d) Visa att den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av (2p)

$$T(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

är surjektiv, dvs. för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ existerar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sådan att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Lösning:

. . . .

(e) Låt (2p)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lös ekvationen $P(X - A)P = B$ för 2×2-matrisen X.

Lösning:

. . . .

(f) Bestäm en vektor $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ sådan att mängden $\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \}$ blir ortonormal. (2p)

Lösning:

. . . .

Lösningsförslag TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD, 170608

1. (a) Mängden $\mathcal{B}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ om och endast om den spänner $\mathbb{R}^3$ och är linjärt oberoende. Eftersom den innehåller 3 vektorer räcker det att verifiera linjärt oberoende. Vi bildar därför den utökade koefficientmatrisen $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\end{bmatrix}$ och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right].$$

Vi har därmed visat att matrisen $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ har ett pivotelement i varje rad vilket ger att $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt oberoende. Genom bakåtsubstitution beräknar vi koordinatvektorn

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T.$$

(b) Ekvationssystemet är ekvivalent med matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ h & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}.$$

Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 & g \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-5h & 1+g-2h \end{array}\right],$$

dvs. $h \neq 3/5$ ger en unik lösning, $h = 3/5$ och $g = 1/5$ ger oändligt många lösningar och för övriga värden på g och h har vi inga lösningar.

(c) En kvadratisk form

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

där A är en $n \times n$-matris och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, är indefinit om och endast om $Q(\mathbf{x})$ antar både positiva och negativa värden. Ett enkelt exempel ges av

$$Q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - y^2.$$

(d) För godtycklig vektor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}y_1 & y_2\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ ger $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & y_1 & y_2\end{bmatrix}^T$ att

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi observerar att $P^2 = I$, dvs. $P^{-1} = P$. Detta ger att

$$X = PBP + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(f) Kom ihåg att en mängd $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sägs vara ortonormal då $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = 0$ för $1 \leq j < k \leq 3$ och $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j = 1$ för $1 \leq j \leq 3$. Dessa villkor är uppfyllda om vi låter

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & -7/3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -3 & -3/2 \end{array}\right],$$

vilket ger inversen

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Kom ihåg produktregeln för determinanten: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Eftersom $\det I_3 = 1$ ger detta att

$$1 = \det(I_3) = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) \Rightarrow \det A^{-1} = 1/\det A.$$

3. Radoperationer ger

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Eftersom första och tredje kolumnerna är pivotkolumner, utgör $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ en bas för kolumnrummet till M.

(b) Vi läser av att

$$M\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom de tre vektorerna i högerledet är linjärt oberoende utgör de en bas för nollrummet till M.

(c) Vi använder Gram-Schmidt metoden. Med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som i del (a) har vi

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix},$$

vilket betyder att $\mathbf{u}$ och $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 8 \end{bmatrix}^T$ utgör en ortogonal bas för kolumnrummet till M.

4. För att bestämma minsta-kvadrat-linjen $L = a + bF$ introducerar vi

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8,2 \\ 11,6 \\ 14,3 \\ 17,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

och löser normalekvationen

$$X^T X\mathbf{c} = X^T\mathbf{L}.$$

Vi har

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{bmatrix}, \quad X^T \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 51,6 \\ 288,6 \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 51,6 \\ 288,6 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51,6 \\ 288,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,25 \\ 1,53 \end{bmatrix}.$$

5. (a) En matris A är symmetrisk om och endast om $A^T = A$. Detta är uppenbart fallet för den matris A som ges i uppgiften.

(b) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 4\big),$$

vilket ger egenvärdena $\lambda = 3, -1$.
Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$: för $\lambda = 3$ observerar vi att

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $s, t \in \mathbb{R}$ med $s \neq 0$ eller $t \neq 0$; för $\lambda = -1$ har vi

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s \in \mathbb{R}$ med $s \neq 0$.

(c) En ortonormal mängd av egenvektorer ges av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Vi har därmed följande ortogonala diagonalisering:

$$A = PDP^T, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Obs: För att lösa uppgiften krävs ej att diagonaliseringen är *ortogonal* men det underlättar eftersom man då slipper beräkna P^{-1}.)

6. (a) För godtyckliga polynom $p, q \in \mathbb{P}_3$ och tal $c, d \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} T(cp + dq) &= \begin{bmatrix} (cp+dq)(0) \\ (cp+dq)'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) + dq(0) \\ cp'(0) + dq'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp'(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dq(0) \\ dq'(0) \end{bmatrix} \\ &= c \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} q(0) \\ q'(0) \end{bmatrix} = cT(p) + dT(q), \end{aligned}$$

dvs. T är linjär.

(b) Kärnan till T består av alla polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sådana att

$$\mathbf{0} = T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix},$$

vilket betyder att $p(x)$ är i kärnan till T om och endast om $p(x) = ax^3 + bx^2$. En bas för kärnan ges därmed av polynomen x^2, x^3: det är uppenbart att de spänner kärnan och de är linjärt oberoende eftersom varje polynom av formen $ax^3 + bx^2$ har maximalt tre (reella) nollställen.

(c) Standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$ utgörs av $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ respektive $\mathcal{E} = \{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T\}$. Detta ger matrisrepresentationen

$$\begin{bmatrix}[T(1)]_{\mathcal{E}} & [T(x)]_{\mathcal{E}} & [T(x^2)]_{\mathcal{E}} & [T(x^3)]_{\mathcal{E}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Matrisens rang är dimensionen av dess kolumnrum vilket är 2.

7. (a) Det betyder att $\mathbf{0} \in H$, om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ är $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ och om $\mathbf{u} \in H$ och $c \in \mathbb{R}$ är $c\mathbf{u} \in H$.

(b) Eftersom

$$\begin{bmatrix}a \\ b \\ b \\ b\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 \\ 1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

och vektorerna $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ är ortogonala utgör de en ortogonal bas för H. Division med respektive vektors längd ger den ortonormala basen

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

(c) Avståndet från punkten $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}2 & 5 & 5 & -1\end{bmatrix}^T$ till delrummet ges av längden av vektorn $\mathbf{x} - \text{proj}_H\mathbf{x}$. Genom att använda den ortonormala basen från del (a) beräknar vi

$$\text{proj}_H\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = 2\hat{\mathbf{u}} + \frac{9}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}2 \\ 3 \\ 3 \\ 3\end{bmatrix},$$

vilket ger

$$||\mathbf{x} - \text{proj}_H\mathbf{x}|| = ||\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & -4\end{bmatrix}^T|| = 2\sqrt{6}.$$