MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-08-27 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Anders Hildeman
ank. 5325

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.
För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. Låt

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att $M^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (1p)

(b) Beräkna N^{-1}. (3p)

(c) Beräkna inversen till matrisen NM. (2p)

3. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på planet vars ekvation är $x + y + z = 0$. (6p)

4. (a) Konstruera en ortonormal bas för radrummet $\mathrm{Row}(A)$ till matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm rangen för matrisen A och beräkna dimensionen av dess nollrum. (2p)

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matriser P och D sådana att D är en diagonal matris och $A = PDP^{-1}$. (3p)

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 8x_1(t) + 4x_2(t), \\ x_2'(t) &= -10x_1(t) - 6x_2(t), \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 2. \end{aligned}$$

6. En vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sägs vara symmetrisk om $x_k = x_{n-k+1}$ och anti-symmetrisk om $x_k = -x_{n-k+1}$ för $k = 1, \ldots, n$.

(a) Visa att för varje vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ existerar en symmetrisk vektor $\mathbf{x}_s$ och en anti-symmetrisk vektor $\mathbf{x}_a$ sådana att $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_a$. (2p)

(b) Visa att de symmetriska och anti-symmetriska delarna $\mathbf{x}_s$ respektive $\mathbf{x}_a$ av $\mathbf{x}$ är linjära funktioner av $\mathbf{x}$. (2p)

(c) Bestäm matriser M_s och M_a sådana att $\mathbf{x}_s = M_s\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}_a = M_a\mathbf{x}$. (2p)

7. Låt $\mathbb{P}_3$ beteckna vektorrummet bestående av alla polynom av grad högst 3 och betrakta den avbildning $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ som ges av $at^3 + bt^2 + ct + d \mapsto 3at^2 + 2bt + c$, dvs. som avbildar ett polynom i $\mathbb{P}_3$ på dess derivata. Denna uppgift handlar om den sammansatta avbildningen $T = D \circ D$.

(a) Beräkna $T(t^3 - 4t^2 + 7t - 1)$. (1p)

(b) Bestäm värdemängden och kärnan till T. (3p)

(c) Bestäm matrisrepresentation av T relativt standardbasen i $\mathbb{P}_3$. (2p)

Lycka till!
Martin H

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Betrakta matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

som en utökad koefficientmatris. Skriv ned motsvarande linjära ekvationssystem och bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet. (3p)

Lösning:

....

(b) Låt H beteckna det delrum av $\mathbb{R}^3$ som består av samtliga vektorer av formen $\begin{bmatrix} a & b & b \end{bmatrix}^T$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Beräkna den ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T$ på H. (3p)

Lösning:

....

Var god vänd!

(c) Beräkna determinanten av matrisen M^{-1}, där (2p)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

....

(d) Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ är baser för ett vektorrum V sådana att (2p)

$$\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{c}_1 - 7\mathbf{c}_2.$$

Ange dimensionen av V och bestäm basbytesmatrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Lösning:

....

(e) Låt $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller $\Phi(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\Phi(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ utgör standardbasen för $\mathbb{R}^2$. (2p)

(i) Beräkna $\Phi\big(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\big)$.

(ii) Finn ett $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ med bild $\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Lösning:

....

(f) Bestäm samtliga matriser X som uppfyller ekvationen $A^{-1}X = B^{-1}$, där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

....

Lösningsförslag TMV142/186 Linjär Algebra Z/TD, 170608

1. (a) Motsvarande ekvationssytem är

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 6 \\ 2y + 8z &= 10 \\ y + 5z &= 3. \end{aligned}$$

Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

dvs. dess unika lösning är $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 13 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) En ortogonal bas för H ges av

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

och den ortogonala projektionen kan därmed beräknas enligt

$$\operatorname{proj}_H(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T) = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}\mathbf{u} + \frac{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\mathbf{v} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

(c) En kofaktorexpansion ger

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Detta betyder att $\det(M^{-1}) = 1/\det(M) = 1/12$.

(d) Per definition är dimensionen av V antalet vektorer i en bas för V, dvs. i detta fall har V dimension 2.

Basbytesmatrisen ges av

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

(e) (i) Eftersom Φ är linjär har vi

$$\Phi(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T) = \Phi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \Phi(\mathbf{e}_1) + \Phi(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Vi behöver lösa ekvationen

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{x}_2) = x_1\Phi(\mathbf{e}_1) + x_2\Phi(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}.$$

(f) Vi har $X = AB^{-1}$ och

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Genom en direkt beräkning visar vi att

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Genom att ställa upp den utökade matrisen $\left[\begin{array}{c|c} N & I_3 \end{array}\right]$ och utföra radoperationerna

$$r_2 \to 2r_2 + r_1, \quad r_3 \to 3r_3 - r_2, \quad r_1 \to 3r_1 - r_2,$$

$$r_1 \to r_1 + 2r_3, \quad r_2 \to r_2 + 4r_3, \quad r_1 \to \frac{1}{6}r_1, \quad r_2 \to \frac{1}{3}r_2,$$

erhåller vi $\left[\begin{array}{c|c} I_3 & N^{-1} \end{array}\right]$ med

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi har

$$(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -11 \\ -4 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. T avbildar planets normal på $\mathbf{0}$ och alla vektorer i planet på sig själva. Därför konstruerar vi först en bas i $\mathbb{R}^3$ som består av två vektorer i planet samt en normalvektor. Ekvationen $x + y + z = 0$, som karakteriserar planet, har lösningarna $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & t & -s-t \end{bmatrix}^T$ med $s, t \in \mathbb{R}$ och en bas för planet ges därmed av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

En normalvektor är

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Med avseende på basen bestående av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ har T matrisrepresentationen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom basbytesmatrisen från basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ till standardbasen är

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ges standardmatrisen för T av PDP^{-1}. Inversen P^{-1} till P kan tex. beräknas genom radreduktion, vilket ger

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och därmed

$$PDP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi observerar att (rad)vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

(som utgör raderna i A) är linjärt oberoende. Genom att använda Gram-Schmidts metod konstruerar vi en ortogonal bas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ för Row(A). Först tar vi

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

sedan

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

och till sist

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Genom att dividera $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ med respektive norm ($= 2$ för $\mathbf{w}_1$, $= 1$ för $\mathbf{w}_2$ och $= \sqrt{2}$ för $\mathbf{w}_3$) erhåller vi den ortonormala basen

$$\mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1' = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

(b) Vi har

$$\text{rang } A = \dim(\text{Row } A) = 3$$

och rang-satsen ger

$$\dim(\text{Nul } A) = 4 - \text{rang } A = 1.$$

5. (a) Vi börjar med att beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till A. Genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ -10 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

ser vi att egenvärdena är $\lambda = 4, -2$.

Vi beräknar motsvarande egenvektorer genom att lösa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$: för $\lambda = 4$ har vi

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = s\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$, $s \neq 0$; och för $\lambda = -2$ gäller att

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenvektorerna $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix}2 & -5\end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$.

Detta betyder att matriserna

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

uppfyller $A = PDP^{-1}$.

(b) Introducerar vi vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

kan vi skriva om systemet av differentialekvationer som

$$\mathbf{v}' = A\mathbf{v}.$$

Variabelbytet

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y}$$

diagonaliserar systemet:

$$y' = Dy.$$

Vi har därmed

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{4t} \\ be^{-2t} \end{bmatrix},$$

där a, b är godtyckliga konstanter. Detta ger

$$\mathbf{v} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ae^{4t} + 2be^{-2t} \\ -ae^{4t} - 5be^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren kräver att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a - 5b \end{bmatrix},$$

vilket har den unika lösningen $a = 3$, $b = -1$.

6. (a) För vektorerna

$$\mathbf{x}_s = (x_{s,1}, \ldots, x_{s,n}), \quad x_{s,k} = \frac{1}{2}(x_k + x_{n-k+1}),$$

$$\mathbf{x}_a = (x_{a,1}, \ldots, x_{a,n}), \quad x_{a,k} = \frac{1}{2}(x_k - x_{n-k+1}),$$

gäller

$$x_{s,k} = x_{s,n-k+1}, \quad x_{a,k} = x_{a,n-k+1},$$

dvs. $\mathbf{x}_s$ är symmetrisk och $\mathbf{x}_a$ är anti-symmetrisk. Vidare gäller att

$$x_{s,k} + x_{a,k} = x_k \Rightarrow \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_a = \mathbf{x}.$$

(b) Om $\mathbf{x} = a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ har vi

$$x_{s,k} = \frac{1}{2}(ay_k + bz_k + ay_{n-k+1} + bz_{n-k+1}) = a\frac{1}{2}(y_k + y_{n-k+1}) + b\frac{1}{2}(z_k + z_{n-k+1}) = ay_{s,k} + bz_{s,k},$$

dvs. $(a\mathbf{y} + b\mathbf{z})_s = a\mathbf{y}_s + b\mathbf{z}_s$, och på liknande sätt ser vi att $(a\mathbf{y} + b\mathbf{z})_a = a\mathbf{y}_a + b\mathbf{z}_a$.

(c) Vi har

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & -1 \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Vi har

$$T(t^3 - 4t^2 + 7t - 1) = D(D(t^3 - 4t^2 + 7t - 1)) = D(3t^2 - 8t + 7) = 6t - 8.$$

(b) För ett godtyckligt polynom $at^3 + bt^2 + ct + d$ i $\mathbb{P}_3$ gäller

$$T(at^3 + bt^2 + ct + d) = 6at + 2b,$$

dvs. dess bild är ett polynom av grad högst 1. Eftersom varje sådant polynom kan skrivas $6at + 2b$ för lämpliga val av a och b följer det att värdemängden till T består av alla polynom av grad högst 1. Vidare ser vi att $T(at^3 + bt^2 + ct + d) = 0$ om och endast om $a = b = 0$, vilket betyder att kärnan sammanfaller med värdemängden.

(c) Standardbasen i $\mathbb{P}_3$ är $\{1, t, t^2, t^3\}$. Eftersom $T(1) = T(t) = 0$, $T(t^2) = 2$ och $T(t^3) = 6t$ är den sökta matrisrepresentationen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$