MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-03-23 kl. 14.00–18.00

Tentamen | Telefonvakt: Sandra Eriksson Barman

Telefon: 5325

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt. Tentan rättas och bedöms anonymt.

Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. Låt $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vara en bas för ett vektorrum V och mängden $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \subset V$ vara definierad av $\mathbf{b}_1 = a\mathbf{c_1} + b\mathbf{c_2}$ och $\mathbf{b}_2 = c\mathbf{c_1} + d\mathbf{c_2}$, där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm dimensionen $\dim V$ av vektorrummet V. (1p)

(b) Bestäm alla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att B utgör en bas för V. (3p)

(c) Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_B$ för $\mathbf{x} \in V$ om $[\mathbf{x}]_C = [-1 \quad 1]^T$ och B är bas för V. (2p)

3. Betrakta delrummet av $\mathbb{R}^3$ definierat av $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$.

(a) Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen proj_W på W. (3p)

(b) Bestäm det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W, samt standardmatrisen för den ortogonala projektionen $\text{proj}_{W^\perp}$ på $W^\perp$. (3p)

4. (a) Visa att om matrisen A är symmetrisk och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är två egenvektorer till A med $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ och $\lambda_1 \neq \lambda_2$ är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala. (1p)

(b) Visa att om $A = PDP^{-1}$ med P ortogonal och D diagonal är A symmetrisk. (1p)

(c) Bestäm en ortogonal diagonalisering av matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}.$$

6. Linjär tillväxt av en storhet y med säsongsvariationer beskrivs av modellen $y(t) = at + b\sin(2\pi t)$, där t är tiden i år och $a, b \in \mathbb{R}$ är konstanter. Anpassa modellen i minstakvadratmening till mätdatan $\mathbf{t} = [1/4 \quad 1/2 \quad 3/4 \quad 1]^T$, $\mathbf{y} = [10 \quad 14 \quad 20 \quad 29]^T$ och bestäm motsvarande minstakvadratfel. (6p)

7. Betrakta vektorrummen $\mathbb{P}_n = \{\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ med operationerna $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)$ och $(c\mathbf{p})(t) = c\mathbf{p}(t)$ för $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_n$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att $W = \text{Span}\{1, t^2\}$ utgör ett delrum av $\mathbb{P}_2$. (2p)

(b) Visa att avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definierad av (4p)

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mapsto \int_0^t \mathbf{p}(s)\,ds = a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3$$

är linjär, samt bestäm dess kärna och avgör om den är surjektiv (onto).

Lycka till!
Fredrik

Anonym kod	**TMV142/186 Linjär algebra Z/TD 2019-03-23**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm samtliga lösningar till det linjära system: (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ \phantom{x_1 + 2{}} x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Invertera matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(c) Bestäm bilden $T(\mathbf{x})$ av $\mathbf{x} = [3 \quad 1]^T$ under den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av spegling i linjen $x_1 + 2x_2 = 0$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Visa att för en inverterbar matris M gäller att $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$ och använd detta för att beräkna $\det(M^{-1})$ för (2p)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) För vilka $a \in \mathbb{R}$ utgör vektorerna (2p)

$$\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1 \quad 2 \quad 1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [0 \quad 1 \quad a]^T$$

en bas för $\mathbb{R}^3$?

Lösning:

Svar: ....

(f) Lös matrisekvationen $AX = B$ med (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....