1a) Utökad koeff.matris för systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right] (-2) \; (1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/5 \\ 0 & 1 & 0 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$

$A \sim I$ dvs systemet har entydig lösning $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$

<u>Svar</u>: Systemet har entydig lösning

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

1b) Invertera A genom att använda $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$ om A inverterbar.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 2 \quad -2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad -5$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 1 & 5 \end{array}\right] \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \quad -1$$

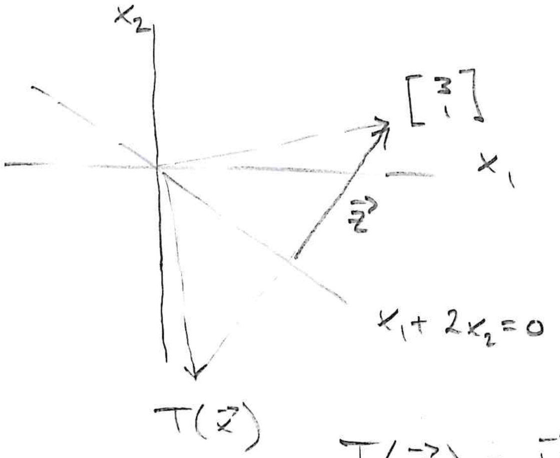
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \quad -2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

1c) $x_1 + 2x_2 = 0$ ger riktningsvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



För $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ har vi

$$\vec{y} = \text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{y} + \vec{z}$$

Bilden $T(\vec{y})$ ges av

$$T(\vec{y}) = \vec{y} - 2\vec{z} = -\vec{y} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{y}$$

$$T(\vec{x}) = -\vec{x} + 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\,\frac{-6+1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Bilden av $\vec{x}$ är $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

1d) Om $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ inverterbar gäller att

$$1 = \det(I_n) = \det(MM^{-1}) = (\det M^{-1})(\det M)$$

M inverterbar $\Rightarrow \det M \neq 0$

$$\Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{\det M} \qquad \boxed{?}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3-6) - 2(12-1) + 5(24-1)$$

$$= -3 - 22 + 115 = 90$$

$$\Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{90}$$

Svar: $\det M^{-1} = \frac{1}{90}$

1e) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör bas för $\mathbb{R}^3$ om de är linjärt oberoende, ty $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linjärt oberoende

$\Leftrightarrow \quad A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] \sim I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \overset{(-1)}{} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A \sim I$ för $a \neq 0$

<u>Svar:</u> $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ för $a \neq 0$

1f) $AX = B$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

A inverterbar ty $\det A = 2 - 9 = -7$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{= I} X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

2) $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ med $\begin{cases} \vec{b}_1 = a\vec{c}_1 + b\vec{c}_2 \\ \vec{b}_2 = c\vec{c}_1 + d\vec{c}_2 \end{cases}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a) Dimensionen ges av antalet element i en bas för V. $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ bas $\Rightarrow$ $\dim V = 2$

b) B bas om $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ linjärt oberoende

$\Leftrightarrow$ $\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 = \vec{0}$ har endast lösn. $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

$$\vec{0} = \alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 = \alpha(a\vec{c}_1 + b\vec{c}_2) + \beta(c\vec{c}_1 + d\vec{c}_2)$$

$$= (\alpha a + \beta c)\vec{c}_1 + (\alpha b + \beta d)\vec{c}_2$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}$ ty $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ linjärt oberoende

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ har endast lösn. $\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ A inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A = ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow$ $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ linjärt oberoende

om $ad - bc \neq 0$

Svar: $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ bas för V

om $ad - bc \neq 0$

c) Byte av bas $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B} \leftarrow C}{P} [\vec{x}]_C$

där $\underset{\mathcal{B} \leftarrow C}{P} = \left(\underset{C \leftarrow \mathcal{B}}{P} \right)^{-1}$

$$\underset{C \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \left[[\vec{b}_1]_C \; [\vec{b}_2]_C \right] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Om $\mathcal{B}$ bas är $\det \underset{C \leftarrow \mathcal{B}}{P} = ad - bc \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\underset{C \leftarrow \mathcal{B}}{P} \right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} -d - b \\ c + a \end{bmatrix}$$

Svar: $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} -(b+d) \\ a+c \end{bmatrix}$

3a) Vi behöver ortogonal bas för W

$$W: x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow \vec{x} = s\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{x}_1} + t\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{x}_2} \quad s,t\in\mathbb{R}$$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ linjärt oberoende, $\text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = W$

men $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1 \neq 0$

Gram-Schmidt: $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad W_1 = \text{Span}\{\vec{v}_1\}$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \underbrace{\frac{\vec{x}_2\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1}_{\text{proj}_{W_1}\vec{x}_2} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$$

För enkelhets skull normerar vi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{4}{6}}\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Standardmatrisen ges av $A_W = [\text{proj}_W\vec{e}_1 \ \ \text{proj}_W\vec{e}_2 \ \ \text{proj}_W\vec{e}_3]$

$$\text{proj}_W\vec{e}_1 = (\vec{e}_1\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{e}_1\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{6}(-1)\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_W\vec{e}_2 = (\vec{e}_2\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{e}_2\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2$$
$$= \frac{1}{2}(1)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{6}(-1)\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_W\vec{e}_3 = (\vec{e}_3\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{e}_3\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2 = \frac{1}{6}(2)\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Svar: $A_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

b) $W^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W \}$

Normalvektorn till planet $W: x_1 + x_2 + x_3 = 0$

är $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W^\perp = \text{Span}(\vec{n})$

är det ortogonala komplementet.

Standardmatrisen B för $\text{proj}_{W^\perp}$ fås från

$$\vec{y} = \text{proj}_W \vec{y} + \text{proj}_{W^\perp} \vec{y} \qquad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad I = A_W + A_{W^\perp}$ med A_W från a).

$$\Rightarrow \quad A_{W^\perp} = I - A_W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $W^\perp = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och

standardmatrisen för $\text{proj}_{W^\perp}$ är

$$A_{W^\perp} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4a) $\lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\lambda_1 \vec{v}_1)^T \vec{v}_2 = (A\vec{v}_1)^T \vec{v}_2 = \vec{v}_1^{\,T} A^T \vec{v}_2$

$= \{A = A^T\} = \vec{v}_1^{\,T}(A\vec{v}_2) = \vec{v}_1^{\,T}(\lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$

$\Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ∎

b) $A = PDP^{-1}$ med $P^T = P^{-1}$, D diagonal

$\Rightarrow A^T = (PDP^{-1})^T = (PDP^T)^T = \underbrace{(P^T)^T}_{=P} D^T P^T$

$= \{D \text{ diagonal} \Rightarrow D^T = D\} = PDP^T = PDP^{-1} = A$ ∎

c) Karaktäristisk ekv:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 9-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+2}(9-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1)$$

$$= -(\lambda - 9)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda-9)(\lambda-4)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ Egenvärden till A är

$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2$

distinkta egenvärden $\Rightarrow$ ortogonala egenrum!

Bestäm ortonormala egenvektorer

$\underline{\lambda_1 = 9}$: $(A-9I) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A-9I)$

$\underline{\lambda_2 = 4}$: $(A-4I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A-4I)$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: $(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A-2I)$

Vi noterar att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0$

För att konstruera ortogonal diagonalisering behöver vi normerade egenvektorer

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$ med

$$P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A = PDP^T$ med

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Begynnelsevärdesproblemet på matrisform

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

med $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Bestäm egenvärden till A:

$$0 = \det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda+4)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ Egenvärden $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$

$\underline{\lambda_1 = -4}$: $(A+4I) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+4I)\vec{x} = \vec{0}$ lösn. $\vec{x} = s\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ bas för Nul$(A+4I)$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $(A-2I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A-2I)\vec{x} = \vec{0}$ lösn. $\vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för Nul$(A-2I)$

$\Rightarrow$ Vi noterar att $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linjärt oberoende

$\Rightarrow$ A diagonaliserbar

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

ger allmänna lösningen till $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

Begynnelsevillkoret $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bestämmer $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\vec{x}(0) = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P\vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0)$$ ty P inverterbar

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-1-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-4t} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \\ \frac{5}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \\ x_2(t) = \frac{5}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$$

Svar: Systemet har lösningen

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \\ x_2(t) = \frac{5}{2} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$$

6) Modellen $y(t) = at + b\sin(2\pi t)$ $[t] = $ år

Systemet vi skall lösa i minstakvadratmening är

$$X\vec{\beta} = \vec{y}$$

med
$$X = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 3/4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ t & \sin(2\pi t) \end{matrix} \end{array} \qquad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen: $X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{y}$

$$X^T X = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1+4+9+16 & 4-12 \\ 4-12 & 16+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 30 & -8 \\ -8 & 32 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$X^T \vec{y} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10+28+60+116 \\ 40-80 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 214 \\ -40 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 428 \\ -80 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[X^T X \mid X^T \vec{y}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 15 & -4 & 428 \\ -4 & 16 & -80 \end{array}\right] \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 15 & -4 & 428 \\ 1 & -4 & 20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 20 \\ 15 & -4 & 428 \end{array}\right] \; (-15)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 20 \\ 0 & 56 & 128 \end{array}\right] \cdot \left(\frac{1}{56}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & \frac{32}{14} \end{array}\right] \; (4)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 20 + \frac{128}{14} \\ 0 & 1 & \frac{32}{14} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{408}{14} \\ 0 & 1 & \frac{32}{14} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 408 \\ 32 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 204 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ger minstakvadratlösningen $a = \frac{204}{7}$ $\quad b = \frac{16}{7}$

Minstakvadratfelet ges av $\|X\hat{\vec{\beta}} - \vec{y}\|$

$$X\hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 204 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 204 + 64 \\ 408 \\ 612 - 64 \\ 816 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 268 \\ 408 \\ 548 \\ 816 \end{bmatrix}$$

$$X\hat{\vec{\beta}} - \vec{y} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 268 \\ 408 \\ 548 \\ 816 \end{bmatrix} - \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 280 \\ 392 \\ 560 \\ 812 \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \| X\vec{\beta} - \vec{y} \| = \frac{1}{7}\sqrt{3^2+4^2+3^2+1^2} = \frac{1}{7}\sqrt{9+16+9+1}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{35} = \frac{1}{7}\sqrt{7\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

<u>Svar:</u> Minstakvadratanpassningen ges av

$$\hat{\vec{\beta}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 204 \\ 16 \end{bmatrix}$$

och minstakvadratfelet är $\| X\hat{\vec{\beta}} - \vec{y} \| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

7) $\mathbb{P}_2 = \{ \vec{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

$(\vec{p} + \vec{q})(t) = \vec{p}(t) + \vec{q}(t)$, $(c\vec{p})(t) = c\vec{p}(t)$ $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{P}_2$, $c \in \mathbb{R}$

a) $W = \text{Span}\{1, t^2\}$

Låt $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in W$, $c \in \mathbb{R}$ godtyckliga

$\vec{p}_1(t) = a_0 + a_2 t^2$ $\quad \vec{p}_2(t) = b_0 + b_2 t^2$

i) $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)(t) = a_0 + a_2 t^2 + b_0 + b_2 t^2$

$= (a_0 + b_0) + (a_2 + b_2) t^2$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \in W$

ii) $(c\vec{p}_1)(t) = c(a_0 + a_2 t^2) = (ca_0) + (ca_2) t^2$

$\Rightarrow c\vec{p}_1 \in W$

iii) $\vec{0} = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot t^2$

$\Rightarrow \vec{0} \in W$

$\Rightarrow$ W delrum av $\mathbb{P}_2$ $\blacksquare$

b) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, $\vec{p} \mapsto \int_0^t \vec{p}(s)\,dt$

T linjär om $\begin{cases} T(\vec{p} + \vec{q}) = T(\vec{p}) + T(\vec{q}) \\ T(c\vec{p}) = cT(\vec{p}) \end{cases}$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{P}_2$ $c \in \mathbb{R}$

$$T(\vec{p}+\vec{q}) = \int_0^t (\vec{p}+\vec{q})(s)\,ds = \int_0^t (\vec{p}(s)+\vec{q}(s))\,ds$$

$$= \int_0^t \vec{p}(s)\,ds + \int_0^t \vec{q}(s)\,ds = T(\vec{p}) + T(\vec{q})$$

$$T(c\vec{p}) = \int_0^t (c\vec{p})(s)\,ds = \int_0^t c\vec{p}(s)\,ds$$

$$= c\int_0^t \vec{p}(s)\,ds = cT(\vec{p})$$

$\Rightarrow$ T linjär. $\boxtimes$

För att bestämma T's egenskaper betraktar vi

$$\vec{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2$$

$$T(\vec{p}) = \int_0^t (a_0 + a_1 s + a_2 s^2)\,ds = \left[a_0 s + \frac{a_1}{2}s^2 + \frac{a_2}{3}s^3\right]_0^t$$

$$= a_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3$$

Vi ser att

$$T(\vec{p}) = \vec{0} \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ker T = \{\vec{0}\} \subset \mathbb{P}_2$$

Videre ser vi att

$\nexists\ \vec{p} \in \mathbb{P}_2$ s.a. $T(\vec{p}) = c_0 \in \mathbb{P}_3$ med $c_0 \neq 0$, $c_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ T är <u>inte</u> surjektiv (onto).

Svar: $\ker T = \vec{0} \in \mathbb{P}_2$

och T är inte surjektiv.