MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-06-11 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Tobias Magnusson
Telefon: 5325

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt. Tentan rättas och bedöms anonymt.
Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. Låt

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Beräkna N^{-1}. (3p)

(b) Visa att $M^{-1} = M$ och beräkna $(MN)^{-1}$. (3p)

3. (a) Definiera det ortogonala komplementet $W^\perp$ till delrum W av $\mathbb{R}^n$ och visa att för $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ är den ortogonala dekompositionen $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, $\hat{\mathbf{y}} \in W$, $\mathbf{z} \in W^\perp$ entydig. (3p)

(b) Betrakta delrummet av $\mathbb{R}^3$ definierat av $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$ och bestäm standardmatrisen för den ortogonal projektionen proj_W på W. (3p)

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -7 \end{bmatrix} .$$

(a) Konstruera en bas för kolumnrummet $\operatorname{Col} A$ och bestäm matrisens rang. (3p)

(b) Konstruera en ortogonal bas för nollrummet $\operatorname{Nul} A$. (3p)

5. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} .$$

6. Betrakta den kvadratiska modellen $Q(x_1, x_2) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_2^2$.

(a) Anpassa $Q(x_1, x_2)$ i minstakvadratmening till mätdatan (4p)

$$\mathbf{x}_1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \mathbf{x}_2 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T, \mathbf{Q} = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 1]^T .$$

(b) Karaktärisera den resulterande kvadratiska formen $Q(x_1, x_2)$. (2p)

7. Betrakta vektorrummen $\mathbb{P}_n = \{\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ med operationerna $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)$ och $(c\mathbf{p})(t) = c\mathbf{p}(t)$ för $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_n$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att avbildningen $D : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ definierad av $\mathbf{p}(t) \mapsto \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$ är linjär. (2p)

(b) Bestäm matrisrepresentationen av D relativt standardbaserna för $\mathbb{P}_2$ och $\mathbb{P}_1$. (2p)

(c) Avgör om D är injektiv respektive surjektiv. (2p)

Lycka till!
Fredrik

Anonym kod	**TMV142/186 Linjär algebra Z/TD 2019-06-11**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm samtliga lösningar till det linjära system: (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten $\det(M)$ för matrisen (3p)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(c) För vilka $a \in \mathbb{R}$ utgör vektorerna (2p)

$$\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [2 \quad 3 \quad 1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [1 \quad 1 \quad a]^T$$

en bas för $\mathbb{R}^3$?

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös matrisekvationen $A^{-1}X = B^{-1}$ med (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm bilden $T(\mathbf{x})$ av $\mathbf{x} = [1 \quad 0]^T$ under den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av ortogonal projektion på linjen $\alpha x_1 + x_2 = 0$ där $\alpha \in \mathbb{R}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Låt $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vara två baser för ett vektorrum V, sådana att $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $\mathbf{b}_2 = -3\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$, och bestäm basbytesmatrisen $\underset{B \leftarrow C}{P}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....