1a) Utökad koeff. matris för systemet

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]}_{A} (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] (3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{10}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] (-2)\ (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad A \sim I$$

$\Rightarrow$ Systemet har entydig lösning $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

<u>Svar:</u> Systemet har entydig lösning

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

1b) $$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-6-2) - (2+2) - 3(8-0) - (-2-8)$$

$$= \cancel{24} - 4 - \cancel{24} + 10 = 6$$

<u>Svar</u>: $\det M = 6$

1c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör bas för $\mathbb{R}^2$ om de är linjärt oberoende ty $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linjärt oberoende

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}}_{=A} \sim I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A \sim I$ för $a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$

<u>Svar:</u> $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bas för $\mathbb{R}^3$ om $a \neq 1$

1d) $A^{-1}X = B^{-1} \iff \underbrace{AA^{-1}}_{=I}X = AB^{-1}$

$\iff X = AB^{-1}$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Notera att $\det A = 2-9 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$!

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(2-4)}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = AB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1e) $\alpha x_1 + x_2 = 0$ ger riktningsvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}$

Projektionen på $\alpha x_1 + x_2 = 0$ ges av

$$T(\vec{x}) = \text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\, \vec{v} = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

Svar: Bilden av $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är

$$T(\vec{x}) = \frac{1}{1+\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

1f) $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ med

$\vec{b}_1 = \vec{c}_1 - \vec{c}_2$ $\vec{b}_2 = -3\vec{c}_1 + 2\vec{c}_2$

Då har vi att

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \left[[\vec{b}_1]_C \; [\vec{b}_2]_C \right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{B \leftarrow C}{P} = \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Basbytesmatrisen $\underset{B \leftarrow C}{P} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

2a) $N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Använd $[N \mid I] \sim [I \mid N]$

$$[N \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \times -1 \\ \times -\frac{1}{5} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] (2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{matrix}}_{N^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow MM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\Rightarrow M^{-1} = M$ $\blacksquare$

$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

<u>Svar:</u> $(MN)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3a) Låt W vara delrum av $\mathbb{R}^n$. Då är

$$W^\perp = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in W\}$$

det ortogonala komplementet till W.

Låt $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ och antag att

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} \qquad \hat{\vec{y}} \in W, \ \vec{z} \in W^\perp \quad \text{och}$$

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}}_1 + \vec{z}_1 \qquad \hat{\vec{y}}_1 \in W, \ \vec{z}_1 \in W^\perp$$

samt notera att $W, W^\perp$ delrum av $\mathbb{R}^n$.

Då har vi $\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} = \hat{\vec{y}}_1 + \vec{z}_1$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \hat{\vec{y}} - \hat{\vec{y}}_1 = \vec{z} - \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \in W \quad \text{och} \quad \vec{v} \in W^\perp$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vec{y}}_1 = \hat{\vec{y}} \quad \text{och} \quad \vec{z}_1 = \vec{z}$$

$\therefore$ Dekompositionen $\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z}$ entydig. $\boxed{3}$

b) $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

$W: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \vec{x} = s\underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}_1} + t\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}_2} \quad s,t \in \mathbb{R}$

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ linjärt oberoende och $W = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

men $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = -2 \Rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ bas för W

men <u>inte</u> ON-bas

<u>Gram-Schmidt</u>: $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad W_1 = \text{Span}\{\vec{v}_1\}$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \underbrace{\frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1}_{=\text{proj}_{W_1}\vec{x}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(-2)}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Normera $\vec{v}_1, \vec{v}_2$: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{25}{30}}\,\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Standardmatrisen för proj_W ges av

$$A_W = [\text{proj}_W \vec{e}_1 \quad \text{proj}_W \vec{e}_2 \quad \text{proj}_W \vec{e}_3]$$

där $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$

$$\text{proj}_W \vec{e_1} = (\vec{e_1} \cdot \vec{u_1})\vec{u_1} + (\vec{e_1} \cdot \vec{u_2})\vec{u_2}$$

$$= \frac{1}{5}(-2)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{30}(1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_W \vec{e_2} = (\vec{e_2} \cdot \vec{u_1})\vec{u_1} + (\vec{e_2} \cdot \vec{u_2})\vec{u_2}$$

$$= \frac{1}{5}(1)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{30}(2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_W \vec{e_3} = (\vec{e_3} \cdot \vec{u_1})\vec{u_1} + (\vec{e_3} \cdot \vec{u_2})\vec{u_2}$$

$$= \frac{1}{5}(0)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{30}(5)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Standardmatrisen ges av

$$A_W = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4a)

$$A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) & (2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} (-3) \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

pivotkolumner

$$\Rightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ bas för Col } A$$

$$\text{rang } A = \dim(\text{Col } A) = 2$$

<u>Svar:</u> $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ bas för Col A

och rang $A = 2$

b) $A\vec{x}=\vec{0} \iff \vec{x} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{=\vec{x}_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{bmatrix}}_{=\vec{x}_2}$ $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ fria variabler

$\Rightarrow$ $\text{Nul } A = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ och

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ linjärt oberoende $\Rightarrow$ Bas för Nul A.

Gram-Schmidt: $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{6}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\-6\\-5\\5\end{bmatrix}$$

Svar: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ med $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\-6\\-5\\5\end{bmatrix}$

utgör ortogonal bas för Nul A.

5) Begynnelsevärdesproblemet på matrisform

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestäm egenvärden till A:

$$0 = \det(A-\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ Egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

$\underline{\lambda_1 = -1}$: $\quad (A+I) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+I)\vec{x} = \vec{0}$ har lösn. $\vec{x} = s\begin{bmatrix} -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ bas för Nul $(A+I)$.

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $\quad (A-2I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A-2I)\vec{x} = \vec{0}$ har lösn $\vec{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för Nul $(A-2I)$.

Vi noterar att $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linjärt oberoende

$\Rightarrow$ A diagonaliserbar.

$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ ger

den allmänna lösningen till $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

Begynnelsevillkoret $\vec{x}(0)$ bestämmer $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}}_{=P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P\vec{c}$$

$\Rightarrow \quad \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0)$ ty P inverterbar

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-2+5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ x_2(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{cases}$$

Svar: Systemet har lösningen

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ x_2(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{cases}$$

6a) Modellen är $Q(x_1, x_2) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_2^2$

Systemet vi skall lösa i minstakvadratmening är

$$\underline{X}\vec{\beta} = \vec{Q}$$

med

$$\underline{X} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{array} \end{array} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen: $\underline{X}^T\underline{X}\vec{\beta} = \underline{X}^T\vec{Q}$

$$\underline{X}^T\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}^T\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\underline{X}^T\underline{X} \,\middle|\, \underline{X}^T\vec{Q}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{array}\right] \cdot -\frac{2}{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right] \cdot -\frac{3}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right] \Rightarrow \hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ger minstakvadratlösningen $\beta_1 = \frac{14}{10}$, $\beta_2 = \frac{5}{10}$, $\beta_3 = \frac{4}{10}$

Svar: Minstakvadratanpassningen ges av

$$\hat{\vec{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Kvadratiska formen $Q(\vec{x}) = \frac{14}{10}x_1^2 + \frac{5}{10}x_1x_2 + \frac{4}{10}x_2^2$

ges av symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} \frac{14}{10} & \frac{5}{20} \\ \frac{5}{20} & \frac{4}{10} \end{bmatrix}$

Vi vill undersöka tecknet hos egenvärdena λ_1^A, λ_2^A

$\Rightarrow$ Studera istället $B = 10A = \begin{bmatrix} 14 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$

$$0 = \det(B-\lambda) = \begin{vmatrix} 14-\lambda & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = (14-\lambda)(4-\lambda) - \frac{25}{4}$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 56 - \frac{25}{4} = \lambda^2 - 18\lambda + \frac{199}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}^B = 9 \pm \sqrt{81 - \frac{199}{4}} = 9 \pm \sqrt{\frac{125}{4}} = 9 \pm \underbrace{\frac{5\sqrt{5}}{2}}_{<9}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^B, \lambda_2^B > 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^A, \lambda_2^A > 0$$

$\Rightarrow$ $Q(\vec{x})$ positivt definit

Svar: $Q(x)$ positivt definit

7a) Låt $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{P}_2$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga

$$D(\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}) = \frac{d}{dt}(\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})(t) = \frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{p}(t)+\beta\vec{q}(t)\right)$$

$$= \alpha\frac{d}{dt}\vec{p}(t) + \beta\frac{d}{dt}\vec{q}(t) = \alpha D(\vec{p}) + \beta D(\vec{q})$$

$\Rightarrow$ $D : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ linjär $\blacksquare$

b) Standardbaserna för $\mathbb{P}_2$ resp. $\mathbb{P}_1$ är

$\mathcal{E}_2 = \{1, t, t^2\}$ resp. $\mathcal{E}_1 = \{1, t\}$

Matrisrepresentationen relativt $\mathcal{E}_2$ och $\mathcal{E}_1$ blir då

$$M = \left[[D(1)]_{\mathcal{E}_1} \; [D(t)]_{\mathcal{E}_1} \; [D(t^2)]_{\mathcal{E}_1} \right]$$

$$= \left[[0]_{\mathcal{E}_1} \; [1]_{\mathcal{E}_1} \; [2t]_{\mathcal{E}_1} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar: Matrisrepresentationen relativt $\mathcal{E}_2$ och $\mathcal{E}_1$

är $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) Betrakta $\vec{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2$

$$D(\vec{p}) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t) = a_1 + 2a_2 t$$

Vi ser att $D(\vec{p}) = a_1 + 2a_2 t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 = 0$

$\Rightarrow \quad \ker D = \{\vec{p}(t) \in \mathbb{P}_2 : a_1 = a_2 = 0\} \neq \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ D <u>inte</u> injektiv

Matrisrepresentationen av D, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

har pivotkolumn i varje rad

$\Rightarrow \quad D(\vec{p}) = \vec{q}$ har lösning $\forall \vec{q} \in \mathbb{P}_1$

$\Rightarrow$ D surjektiv.

<u>Svar:</u> Avbildningen D är surjektiv men inte injektiv.