MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-08-26 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Carl Lundholm
Telefon: 6457

TMV142/186 Linjär algebra Z/TD

Skriv tentamenskoden tydligt på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt. Tentan rättas och bedöms anonymt.
Betygsgränser: 3: 20-29, 4: 30-39 och 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. (a) Låt $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ vara inverterbara. Visa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (2p)

(b) Invertera matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Låt $\mathbf{b}_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$, $\mathbf{b}_2 = [2 \quad 0 \quad 1]^T$, $\mathbf{b}_3 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ och $\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$. Visa att $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{u}]_B$ för $\mathbf{u}$ i basen B. (6p)

4. (a) Visa att för matrisen $U = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3]$ med $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ gäller att $U^TU = I$ (där I betecknar enhetsmatrisen) omm kolumnvektorerna $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ är ortonormala. (2p)

(b) Bestäm en ortogonal diagonalisering av matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}.$$

6. Anpassa modellen $F(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ i minstakvadratmening till mätdatan $\mathbf{x} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^T$, $\mathbf{F} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^T$ och bestäm motsvarande minstakvadratfel. (6p)

7. Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3 med operationerna $(\mathbf{p}+\mathbf{q})(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)$ och $(c\mathbf{p})(t) = c\mathbf{p}(t)$ för $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_3$, $c \in \mathbb{R}$ och låt $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ vara definierad av

$$\mathbf{p}(t) \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{p}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Bestäm matrisrepresentationen av T relativt standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$. (2p)

(c) Konstruera en bas för kärnan till T. (2p)

Lycka till!
Fredrik

Anonym kod	**TMV142/186 Linjär algebra Z/TD 2019-08-26**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm samtliga lösningar till det linjära systemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \quad\quad\ \ x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanterna $\det(A)$ och $\det(AB)$ för matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(c) Låt $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av (2p)

$$\Phi(\mathbf{e}_1) = [1 \quad 3]^T \quad , \quad \Phi(\mathbf{e}_2) = [-2 \quad 1]^T ,$$

där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är standardbasen i $\mathbb{R}^2$. Bestäm alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $\Phi(\mathbf{x}) = [1 \quad 1]^T$.

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös matrisekvationen $B(X - A)B^T = C$ med (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm bilden $T(\mathbf{x})$ av $\mathbf{x} = [2 \quad 3]^T$ under den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av spegling i linjen $x_1 + x_2 = 0$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm dimensionen för det delrum av $\mathbb{R}^3$ som definieras av (2p)

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a+b+c \\ a+c \\ b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösning:

Svar: ....