1a) Utökad koeff.matris för systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \cdot \tfrac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] (-2)\ (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad A \sim I$$

$\Rightarrow$ Systemet har entydig lösning $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Svar</u>: Systemet har entydig lösning

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+3) = -4$$

$$\det B = \{B \text{ triangulär}\} = 1^4 = 1$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = -4$$

<u>Svar:</u> $\det A = -4$, $\det(AB) = -4$

1c) Eftersom Φ är linjär har vi

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}) = x_1\Phi(\vec{e_1}) + x_2\Phi(\vec{e_2})$$

$$= x_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Eftersom $\det\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\right) = 7 \neq 0$

har systemet den entydiga lösningen

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ har entydig lösning $\vec{x} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

1d) Lös för X i $B(X-A)B^T = C$

$$\Rightarrow \quad X = B^{-1}C(B^T)^{-1} + A = B^{-1}C(B^{-1})^T + A$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

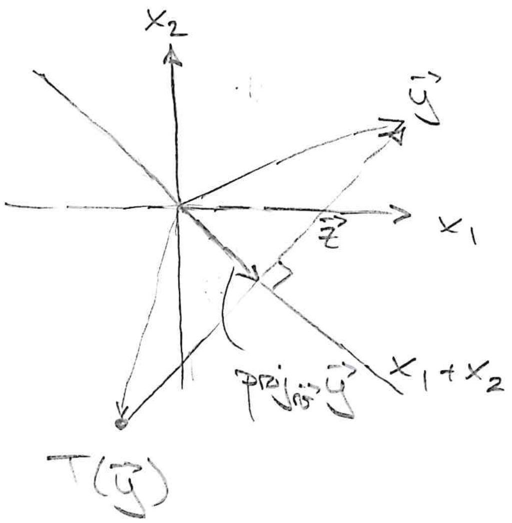
$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

1e) $x_1 + x_2 = 0$ ger riktningsvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



För godtyckligt $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{y} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{y} + \vec{z}$$

$$\Rightarrow T(\vec{y}) = \vec{y} - 2\vec{z} = -\vec{y} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\vec{y}$$

$$\Rightarrow T(\vec{x}) = -\vec{x} + 2\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$$

$$= -\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Svar: Bilden av $\vec{x}$ är $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

1f) $H = \left\{ a\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{=\vec{v}_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ $H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ och

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ linjärt oberoende

$\Rightarrow$ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bas för H

$\Rightarrow$ $\dim H = 2$

<u>Svar:</u> $\dim H = 2$.

2a) För $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ inverterbara har vi

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{(BB^{-1})}_{=I}A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^T A^T = (\underbrace{AA^{-1}}_{=I})^T = I^T = I$$

$\Rightarrow$ AB och A^T är inverterbara med

invers $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ resp. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\boxtimes$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Använd $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] -1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \times -\tfrac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{2}{5} & -\tfrac{1}{5} & \tfrac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] -\tfrac{2}{5} \quad -1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ -3 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{= A^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3) $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ med $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

utgör bas för $\mathbb{R}^3$ om $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ linjärt oberoende eftersom $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ lin. ober. $\Leftrightarrow \det([\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3]) \neq 0$

$$\det([\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3]) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ B utgör bas för $\mathbb{R}^3$ $\boxtimes$

För att bestämma $[\vec{u}]_B$ konstruerar vi först

$$\underset{E \leftarrow B}{P} = [\,[\vec{b}_1]_E\ [\vec{b}_2]_E\ [\vec{b}_3]_E\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidare har vi $\underset{B \leftarrow E}{P} = (\underset{E \leftarrow B}{P})^{-1}$

$$[\underset{E \leftarrow B}{P} \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \times -1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ (-2) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$= {}_{B}P_{\leftarrow \varepsilon}$$

$$\Rightarrow [\vec{u}]_B = {}_{B \leftarrow}P_{\varepsilon}[\vec{u}]_{\varepsilon} = {}_{B}P_{\leftarrow \varepsilon}\,\vec{u}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $[\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

4a) $U = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3]$ Alltså har vi

$$U^T U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \end{bmatrix} [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T u_1 & \vec{u}_1^T \vec{u}_2 & \vec{u}_1^T \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2^T \vec{u}_1 & \vec{u}_2^T \vec{u}_2 & \vec{u}_2^T \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3^T \vec{u}_1 & \vec{u}_3^T \vec{u}_2 & \vec{u}_3^T \vec{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot u_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{bmatrix} = I$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 1 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases}$$

dvs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormala. ∎

b) Karakteristisk ekv:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) - 4(3-\lambda)$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda^2-4) = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow$ Egenvärden till A är $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

Bestäm ortonormala egenvektorer:

$\underline{\lambda = -2}$: $A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A + 2I)$

$\underline{\lambda = 2}$: $A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A - 2I)$

$\underline{\lambda = 3}$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A - 3I)$

Vi noterar att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0$

som väntat för $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distinkta.

För att konstruera ortogonal diagonalisering behöver vi normerade egenvektorer:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$ med

$$P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A = PDP^T$ med

$$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

5) Begynnelsevärdesproblemet på matrisform:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

med $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Bestäm egenvärden till A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow$ Egenvärden $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$

$\underline{\lambda_1 = 2}$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A - 2I)$

$\underline{\lambda_2 = 3}$: $A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bas för $\mathrm{Nul}(A - 3I)$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linjärt oberoende egenvektorer.

$\Rightarrow$ A diagonaliserbar

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$ ger

allmänna lösningen till $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

Begynnelsevillkoret $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bestämmer $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}}_{=P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P\vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0)$$ ty P inverterbar

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-1+2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = P^{-1}\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} -3e^{2t} + 2e^{3t} \\ 3e^{2t} - e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -3e^{2t} + 2e^{3t} \\ x_2(t) = 3e^{2t} - e^{3t} \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Systemet har lösningen

$$\begin{cases} x_1(t) = -3e^{2t} + 2e^{3t} \\ x_2(t) = 3e^{2t} - e^{3t} \end{cases}$$

6) Modellen är $F(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

$\Rightarrow$ Systemet vi skall lösa i minstakvadrat-mening är $X\vec{\beta} = \vec{F}$ med

$$X = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{array} \end{array} \qquad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen: $X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{F}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

$$X^T \vec{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [X^T X \mid X^T \vec{F}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 18 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2) \quad (-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \end{array}\right] (-1) \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times -\frac{1}{5} \\ \times \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] (-1)\ (-4) \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$ ger

minstakvadratlösningen

$$\beta_0 = \frac{3}{10} \quad \beta_1 = -\frac{1}{10} \quad \beta_2 = \frac{5}{10}$$

Minstakvadratfelet ges av $\| X\hat{\vec{\beta}} - \vec{F} \|$

$$X\hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X\hat{\vec{\beta}} - \vec{F} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9-10 \\ 3-0 \\ 7-10 \\ 21-20 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \| X\hat{\vec{\beta}} - \vec{F} \| = \frac{1}{10}\sqrt{1+9+9+1} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Svar: Minstakvadratanpassningen ges av $\hat{\vec{\beta}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

och minstakvadratfelet är $\| X\hat{\vec{\beta}} - \vec{F} \| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

7 a) Låt $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{P}_3$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga

$$T(\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}) = \begin{bmatrix} (\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})(1) \\ (\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\vec{p}(1)+\beta\vec{q}(1) \\ \alpha\vec{p}'(1)+\beta\vec{q}'(1) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \vec{p}(1) \\ \vec{p}'(1) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \vec{q}(1) \\ \vec{q}'(1) \end{bmatrix} = \alpha T(\vec{p}) + \beta T(\vec{q})$$

$\Rightarrow$ T linjär avbildning.

$\boxtimes$

b) Standardbaserna för $\mathbb{P}_3$ och $\mathbb{R}^2$ är

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ respektive $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Matrisrepresentationen relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{E}$ är

$$M_T = \left[[T(1)]_{\mathcal{E}} \; [T(t)]_{\mathcal{E}} \; [T(t^2)]_{\mathcal{E}} \; [T(t^3)]_{\mathcal{E}} \right]$$

$$= \left[T(1) \; T(t) \; T(t^2) \; T(t^3) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar: $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) Allmänna formen av $\vec{p} \in \mathbb{P}_3$ är

$$\vec{p}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad ; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Kärnan till består av alla $\vec{p} \in \mathbb{P}_3$

$$T(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}(1) = a+b+c+d = 0 \\ \vec{p}\,'(1) = 3a+2b+c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a-2b \\ d = -a-b-c = 2a+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker T = \{\vec{p}(t) = at^3 + bt^2 + (-3a-2b)t + (2a+b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\vec{p}(t) = a\underbrace{(t^3-3t+2)}_{=\vec{p}_1} + b\underbrace{(t^2-2t+1)}_{=\vec{p}_2} : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Vi ser att $\ker T = \text{Span}\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$

och $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ är linjärt oberoende

$\Rightarrow$ $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ bas för $\ker T \subset \mathbb{P}_3$

<u>Svar:</u> $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ med $\vec{p}_1(t) = t^3 - 3t + 2$ och

$\vec{p}_2(t) = t^2 - 2t + 1$ utgör bas för $\ker T$